

هبة نصر قعدان

# الرياضيات

■ معادلات الرتبة الأولى

■ المحددات

■ مفاهيم عامة في التوابع

■ والاستمرار والاشتقاق

■ المشتقات

■ مجموعات الأعداد









بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ وَقُلْ أَعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ

إِلَىٰ عِلْمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنْشَرُّ بِمَا كُنتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

الْحَمْدُ لِلَّهِ  
الْعَلِيِّ الْعَظِيمِ



# الرياضيات

- معادلات الرتبة الأولى
- المحددات
- مفاهيم عامة في التوابع والاستمرار والاشتقاق
- المشتقات
- مجموعات الأعداد

هبة نصر قعدان

الطبعة الأولى

2014م - 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

المملكة الأردنية الهاشمية  
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2011 /1 /456)

510

قعدان، هبة نصر  
الرياضيات: معادلات الرتبة الأولى / هبة نصر قعدان. - عمان: دار صفاء  
للنشر والتوزيع 2011.  
( ) ص  
ر.أ: 2011/1/456  
الواصفات: // الرياضيات//  
♦ يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا  
المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومة أخرى

حقوق الطبع محفوظة للناسر

Copyright ©  
All rights reserved

الطبعة الأولى

2014م - 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان - شارع الملك حسين - مجمع الفحيص التجاري - تلفاكس +962 6 4612190  
هاتف: +962 6 4611169 ص.ب 922762 عمان - 11192 الأردن

**DAR SAFA Publishing - Distributing**

Telefax: +962 6 4612190- Tel: + 962 6 4611169

P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan

<http://www.darsafa.net>

E-mail: [safa@darsafa.net](mailto:safa@darsafa.net)

ردمك ISBN 978-9957-24-711-9

## الفهرس

٩	الفصل الأول: معادلات الرتبة الأولى
٩	طرق مباشرة
٢٠	طرق التعويض
٢٨	المعادلة الخطية
٣٧	معادلات خاصة لا خطية
٤٤	المعادلات المحكمة
٥١	معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الأولى
٥٩	تطبيقات على معادلات الفروق
٦٨	الدوائر الكهربائية البسيطة
٧٤	منحنيات المطاردة
٨٢	التحليل، الحجرات
٨٩	التمارين
٩٥	الفصل الثاني: المحددات
٩٥	اقتان المحدد
٩٥	حساب المحدد للمصفوفة المربعة
١٠٣	خصائص المحددات
١١٢	المصفوفة المصاحبة
١١٣	نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الضرب
١٢٣	المصفوفة المنفردة وغير المنفردة
١٢٤	المصفوفة الممتلئة

١٢٤	درجة المصفوفة.....
١٢٧	المصفوفات ونظم المعادلات الخطية.....
١٣٢	طرق حل أنظمة المعادلات الخطية.....
١٤٨	تمارين.....
١٥٧	الفصل الثالث: مفاهيم عامة في التوابع والاستمرار والاشتقاق.....
١٥٨	الخواص الجبرية للتوابع الحقيقة.....
١٦٤	متطابقات وعلاقات شهيرة في التوابع المثلثية.....
١٦٨	علاقات ومتطابقات شهيرة في التوابع القطعية.....
١٧١	نهايات التوابع.....
١٧٧	خواص النهايات.....
١٨٦	الاشتقاق والتفاضل.....
١٨٧	المعنى الهندسي للمشتق.....
١٩٥	قاعدة الاشتقاق الضمني.....
١٩٩	طريقة الاشتقاق بواسطة اللوغاريتم.....
٢١٣	تمارين.....
٢١٩	الفصل الرابع: المشتقات.....
٢١٩	جدول المشتقات.....
٢٢٢	الاشتقاق اللوغاريتمي.....
٢٣٥	تمارين.....
٢٤٧	الفصل الخامس: مجموعات الأعداد.....
٢٤٧	مجموعة الأعداد الطبيعية.....
٢٤٧	بديهيات يانو.....
٢٤٨	من الخواص الجبري لمجموعة الأعداد الطبيعية.....
٢٤٨	(أ) الجمع.....
٢٤٨	(ب) الضرب.....
٢٤٨	(ج) الترتيب.....
٢٥٣	تمارين.....



## الفصل الأول

### معادلات الرتبة الأولى



## الفصل الأول

### معادلات الرتبة الأولى

قد يكون حل معادلة من الرتبة الأولى، تفاضلية كانت أو معادلة فرق، أمراً صعباً جداً، ذلك أنه ليس هنالك طريقة عامة تصلح لجميع الحالات، وفي هذا الفصل ندرس بعضاً من ألحج الطرق لحل معادلة الرتبة الأولى.

وسنرى من هذا الفصل و الفصول التالية أن مقدرتنا على حل المعادلات التفاضلية الخطية لا يحدها سوى قدرتنا على إجراء تكاملات قائمة على قاعدة نظرية ناضجة، وسنرى من ناحية أخرى أن عديداً من الطرق تلزم للتاني للمعادلات غير الخطية، ولكن ليس هنالك ما يضمن أن أياً منها مستتج، لهذا ستبدو الطرق التي نعرضها كأنها حشد من الحيل.

إنها على كل حال تقوم على ثلاثة مبادئ أساسية:  
التعويض، وفصل المتغيرات، والضرب باقتران مناسب.

#### (١-١) طرق مباشرة

خذ المعادلة التفاضلية التالية، وهي من الرتبة الأولى:

$$\frac{dv}{ds} = q(s, v) \dots\dots\dots (١-١)$$

فإذا أمكن كتابة الاقتران  $q(s, v)$  بحيث لا يشتمل على الدالة المتغيرة  $v$ ، فعندها تحل المعادلة بمكاملة طرفيها بالنسبة إلى  $s$ .



المثال (١):

دص =  $\frac{ص + ص}{ص + ١}$  فبعد اختزال العامل المشترك (١+ص) من البسط والمقام في الطرف الأيسر، يبقى في هذا الطرف ص، ويكون: الطرف ص، ويكون:

$$ص = [ص د ص + \frac{ص^٢}{٢}]$$

وواضح أن هذه الطريقة تصح مع معادلات من رتب أعلى، من النوع ص (٥) = ق (ص).

ويمثل هذه السهولة نمذ طريقة فصل المتغيرات، وهي تستعمل حيث يمكن تحليل ق (ص، ص) الى الشكل:

ق (ص، ص) =  $\frac{ك(ص)}{ل(ص)}$ ، حيث ك (ص)، ل (ص) كل منهما اقتران بمتغير واحد، فعندها تكتب المعادلة (١-١) على النحو ل (ص)  $\frac{دص}{ص} = ك (ص)$ .

فنكامل طرفي المعادلة بالنسبة إلى ص، ونغير متغيرات الطرف الأيمن فينتج:

$$ل(ص) دص = ل(ص) \frac{دص}{ص} = [ك(ص) دص + ج.]$$

المثال (٢)

دص =  $\frac{ص}{ص}$  ص نكتب هذه المعادلة بالشكل  $\frac{١}{ص} دص = ص دص$  بحيث





يجري تغير المتغيرين تلقائياً، ونكامل الطرفين، فينتج  $\left[ ص = ص^2 + ج \right]$ ، أو بلغة الأس:

$$ص = ص^2 + ج \Rightarrow ص - ص^2 = ج$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة، وهو يحتوي على جـ ١. وهذا ثابت حقيقي غير عدد، ولذا فالمعادلات التفاضلية  $ص = ص^2$  من ص عدد لا نهاية له من الحلول، حسب القيمة التي نعطيها للثابت جـ ١.

إذا عينا شرطاً ابتدائياً يضاف الى المعادلة التفاضلية في المثال (٢) فعندها يعين هذا الشرط حل لمسألة القيمة الابتدائية كاملاً، فمثلاً اذا كان الشرط الابتدائي  $ص(١) = ٢$ ، فتعويض  $ص = ١$  في الحل العام، ينتج  $ص = ٢ = ص$   $(١) = ٢$ ، هو:  $ص = ٢ - ص^{١-٢}$

والحصول على حل وحيد لمسألة قيم ابتدائية يلزم أن نعين شرطاً ابتدائية بقدر رتبة المعادلة، ومستثبت هذه الحقيقة.

المثال (٢) حصلنا على المعادلة الحركية:

$$\frac{د}{د\tau} = (B - \epsilon\delta) \dots\dots\dots (٢-١)$$

حيث  $B, \delta$

ثابتان معطيان فنفصل المتغيرين فينتج:

$$\frac{د}{د\tau} = (B - \epsilon\delta) \dots\dots\dots (٣-١)$$

ويسهل أن نتحقق من أن:

$$\frac{\delta}{(\epsilon\delta)} + \frac{1}{\epsilon B} = \frac{1}{(\epsilon\delta - \epsilon B)}$$



فبتعويض الطرف الأيسر من هذه المعادلة في (٣-١)، واجراء التكامل،

ينتج:

$$\frac{1}{B} \ln E - \frac{1}{B} \ln Y = (S-B) \ln Z + C$$

أي أن

$$\ln Z = \frac{E}{(S-B)} - C$$

فالرفع والتعبير عن الثابت الاعباطي هـ بالرمز ج ينتج

$$Z = \frac{E}{(S-B)} - C \quad (٤-١)$$

[ تنبيه: سيستج مثل هذه الاجراءات في الثوابت دون التنبيه الى ذلك ]

والان نعوض  $Z = 0$ ،

فيستج:

$$0 = \frac{E}{(S-B)} - C \quad (٥-١)$$

نعوض قيمة هذه في المعادلة (٤-١) فيستج:

$$\frac{E}{(S-B)} - C = \frac{E}{(S-B)} - C \quad (٦-١)$$

نحصل على النتيجة:

$$C = \frac{B}{(S-B) - C} \quad (٦-١)$$

وكثيراً ما يكون من المفيد كتابة المعادلة بالصيغة

$$C = (S-B) - \frac{B}{C}$$

وعندها يصير بالإمكان أن نضرب المعادلة باقتران فنحصل على تفاضلة اقتران آخر معروف.

المثال (٣):

$$\frac{\text{دص}}{\text{دص} + \text{ص}^2} = \text{نعيد كتابة المعادلة بالصيغة}$$

$$(\text{ص} + \text{ص}^2) \text{ دص} = \text{دص} - \text{ص} \text{ دص} = 0, \text{ ونعيد ترتيبها بالصيغة}$$

$$\text{ص}^2 \text{ دص} + \text{دص} = (\text{ص} \text{ دص} - \text{ص} \text{ دص}) = 0 \dots\dots\dots (٧-١)$$

فالقوسان يذكران بالصيغة التفاضلية

$$\text{د} \left( \frac{\text{ص}}{\text{دص}} \right) = \frac{\text{ص} \text{ دص} - \text{دص}^2}{\text{ص}^2} \dots\dots\dots (٨-١)$$

$$\text{فنقسم المعادلة (٧-١) على ص}^2 \text{ ويتج} \text{د} \left( \frac{\text{ص}}{\text{دص}} \right) + \left( \frac{\text{ص}}{\text{دص}} \right) = 0,$$

$$\text{وبالتكامل، يتج} \frac{\text{ص}}{\text{دص}} + \frac{\text{ص}}{\text{دص}} = \text{ج.}$$

والصيف التفاضلية التالية كثيراً ما تنفيد في حالات مماثلة:

$$\text{د} \left( \frac{\text{ص}}{\text{دص}} \right) = \frac{\text{ص} \text{ دص} - \text{دص}^2}{\text{ص}^2} \dots\dots\dots (٩-١)$$

$$\text{د} (\text{ص} \text{ دص}) = \text{ص} \text{ دص} + \text{ص} \text{ دص}, \dots\dots\dots (١٠-١)$$

$$\text{د} (\text{ص}^2 \text{ دص}) = 2 (\text{ص} \text{ دص} + \text{ص} \text{ دص}), \dots\dots\dots (١١-١)$$

$$\text{د} \sqrt{\text{ص}^2 + \text{ص}^2} = \frac{\text{ص} \text{ دص} - \text{ص} \text{ دص}}{\text{ص}^2 + \text{ص}^2}$$



$$د \left( \frac{ص}{ص} \right)^{1-} = \frac{ص د ص - ص د ص}{ص^2 ص} \dots (13-1)$$

$$د \left( \frac{ص}{ص} \right)^{1-} = \frac{ص د ص - ص د ص}{ص} \dots (14-1)$$

المثال (٤):

المسقوط الحر حسب قانون نيوتن الثاني في الحركة: إذا أثرت قوة ق على جسم كتلة ك، فإن الجسم يسير بتسارع ت حيث  $ت = \frac{ق}{ك}$ . أي أن  $ق = ك ت$ . فإذا سقط جسم سقوطاً حراً بتأثير الجاذبية الأرضية، فالقوة المؤثرة عليه هي وزنه ك ج حيث هو تسارع الجاذبية (ويمكن اعتباره على سطح الأرض ثابتاً يساوي ٣٢ قدماً في الثانية) فليكن ص ارتفاع الجسم فوق سطح الأرض، فيكون تسارع الجسم إلى أعلى  $\frac{د^2 ص}{د ت^2}$

$$ك - \frac{د ص}{د ت^2} = ك د \dots (15-1)$$

والإشارة السالبة تشير إلى أن الجاذبية تؤثر إلى أسفل، فبالاختصار والمكاملة، يتج:

$$\frac{د ص}{د ت} = د + د ع \dots (16-1)$$

حيث ع. هي سرعة الجسم عند  $ت = ٠$  تكامل مرة أخرى، فيتج:

$$ص = \frac{١}{٢} د ت^2 + ع ت + ص \dots (17-1)$$

حيث ص. هو ارتفاع الجسم عن  $ت = ٠$





السقوط الموقوف اذا أخذنا بعين الاعتبار أن الهواء يبذل قوة مقاومة تتناسب مع سرعة الجسم، تصبح المعادلة (١٥-١) بالشكل.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g - \frac{c}{v} \quad (15-1)$$

(والإشارة السالبة في الحد الأخير تشير الى ان مقاومة الهواء تحدث تباطؤاً).

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{c}{v} \quad (16-1)$$

$$\text{ونفصل المتغيرين، فينتج} \quad \left[ -\frac{c}{v+g} = \int dt \right]$$

فيكون:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{g} \left( \frac{c}{v+g} + 1 \right)$$

وبعد الرفع ينتج

$$c = \frac{g}{v} - \frac{c}{v+g} \quad (17-1)$$

ولأن  $c > 0$ ، فإن  $c = \frac{g}{v} - \frac{c}{v+g}$  عندما  $v \rightarrow \infty$ . وهذه السرعة التي

يؤول اليها الجسم نسميها حد السرعة Termind Velocity. في (١٧-١): إذا

جعلنا  $v = 0$  نستنتج أن  $c = g + c$ . فإذا كانت  $c = 0$  ينتج أن:

$$c = \frac{g}{v} - \frac{c}{v+g} \quad (18-1)$$

ولايجاد الارتفاع  $x$  في أي لحظة  $t$ ، نجري عملية تكامل ثانية على المعادلة

(١٨-١).

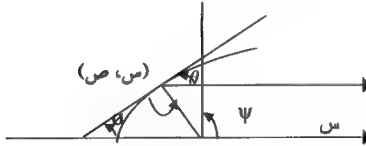


المثال (٥):

كيف يجب أن تكون هيئة مرآة منحنية بحيث تكون أن النور الساقط عليها من مصدر في نقطة الأصل ينعكس موازياً لمحور س؟

نعلم من التماثل أن سطح المرآة سطح دوراني ينجم عن دوران منحنى حول محور س. فلتكن (س، ص) أي نقطة على المقطع العرضي للسطح، في المستوى س ص (انظر الشكل (١-١)). ينص قانون الانعكاس على أن زاوية السقوط  $\alpha$  تساوي زاوية الانعكاس  $B$ . فيكون  $c = B = \alpha$  ولأن مجموع الزوايا الداخلة في المثلث  $180^\circ$  ينتج أن  $\psi = c + \alpha = 2c$ . والمهم في أمر  $c$ ،  $\psi$  أن:

$$\text{ص} = -\text{ظا } c, \quad \text{ظا } \psi = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$



الشكل (١-١)

فباستعمال العلاقة المثلثية لظل ضعف الزاوية ينتج أن:

$$\frac{\text{ظا } \psi}{\text{س}} = \text{ظا } c = \frac{\text{ظا } 2c}{1 - \text{ظا }^2 c} = \frac{2\text{ص}}{\text{س}^2 - 1}$$

نحل المعادلة لإيجاد ص، فنحصل على المعادلة التربيعية:

$$\text{ص}^2 + 2\text{ص} - \text{س}^2 = 0$$

فحسب قاعدة المعادلة التربيعية يكون:  $\frac{-\sqrt{b^2 - 4ac} \pm b}{2a} = -\frac{b}{2a}$

وهذا يكتب بالشكل:  $\sqrt{b^2 - 4ac} \pm b = -2a$

فحسب المعادلة (١٢-١)

يتتبع أن  $\sqrt{b^2 - 4ac} \pm b = -2a$  ويتربع الطرفين،

$$b^2 - 4ac \pm 2ab + a^2 = a^2$$

وهذه معادلة فصلية مقطوع مكافئة بؤرتها في نقطة الأصل وهي تماثل

بالنسبة الى محور س.

التمارين (١-١)

في التمارين ١ الى ٢٠، أوجد الحل العام، صريحاً إذا أمكن، والا فأوجد

علاقة تعرف الحل ضمناً. وحيث يذكر شرط ابتدائي، أوجد الحل الخاص الذي

يحققه:

$$1. \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$2. \text{س ص} = -3 \text{ ص ص}, \text{س ص} = 5$$

$$3. \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}$$

$$4. \frac{d^2y}{dx^2} = \text{س جتا ص}, \text{س} = (\pi/2)$$

$$5. \frac{d^2y}{dx^2} = (1 + y^2)^2$$

$$٦. \frac{دص}{دس} + ص = ص (س هـ س + ١)، ص (٠) = ١$$

$$٧. \frac{دف}{دق} = ف (جتاق + جاق)$$

$$٨. \frac{دص}{دس} = ص (١ + س هـ س)، ص (٠) = ١$$

$$٩. \frac{دم}{دن} + م^٢ = م^٢ ن، م (٠) = ١$$

$$١٠. \frac{دص}{دس} = \sqrt{١ - ص^٢}$$

$$١١. (١ + س) دص + ٣ ص دس = ٠، ص (٦) = ٧$$

$$١٢. \frac{دس}{دن} + (جتان) هـ س = ٠$$

$$١٣. (ص + ٣) دس + جتان دص = ٠$$

$$١٤. \frac{دس}{دن} = س (١ - جا ٢ ن)، س (٠) = ١$$

$$١٥. \sqrt{١ - ص^٢} دص + \sqrt{١ - ص^٢} دس = ٠$$

$$١٦. (جاس جتانص) دس + (جتان جا ص) دص = ٠، ص (٠) = ٠$$

$$١٧. س^٢ دص + ص^٢ دس = ٠، ص (١) = ١$$

$$١٨. \frac{دص}{دس} = \frac{ص^٢ ص}{ص^٣ ص}، ص (١) = ١$$

$$١٩. هـ س = \left( ١ + \frac{دس}{دن} \right)، س (٠) = ١$$

$$٢٠. (ل ٢ - ل ٢ - ٨) دم = (م^٢ + م - ٢) ل، م (٠) = ٠$$

٢١. افترض مجتمعاً  $(N)$  يتكاثر حسب المعادلة الحركية  
 $dN/dt = (B - \alpha)N$ . برهن أن سرعة النمو تكون في نهايتها العظمى  
 عندما يكون العدد نصف العدد الذي ستقر المجتمع عليه.

٢٢. في مزرعة بروتوزوا تقدم البكتيريا غذاء، بمعدل ثابت مقداره ٩. وقد  
 لوحظ انها تستهلك بسرعة تتناسب مع مربع عددها. فتركيز البكتيريا إذن  
 $N^2$  ك/ك  $N^2$  يحقق المعادلة التفاضلية  $dN/dt = \mu - \lambda N^2$ ، حيث  $\lambda$  ثابت  
 موجب.

(أ) عبر عن  $K$  ( $N$ ) بدلالة  $K$  (٠).

(ب) كم يكون التركيز في حالة الاستقرار؟

٢٣. في بعض التفاعلات الكيميائية تعمل بعض النواتج وسائط ذاتية لانتاج  
 المزيد منها. فإذا كان  $S$  ( $N$ ) مقدار ناتج منها في الزمن  $N$ ، فإن المعادلة  
 التفاضلية  $dS/dN = (B - \alpha)S$  هي نموذج محتمل لهذا التفاعل،  
 حيث  $\alpha$  و  $B$  إذ عندها تكون إحدى المواد الكيميائية قد استنفدت.

(أ) حل المعادلة بدلالة الثوابت  $\alpha$  و  $B$ ،  $S$  (٠)

(ب) على فرض أن  $\alpha = 1$ ،  $B = 200$ ،  $S(0) = 20$ ، ضع رسماً  
 بيانياً يعطي  $S(N)$ ،  $N <$

٢٤. في احد الأيام بدأ الثلج يتساقط في الصباح الباكر، واستمر بسرعة ثابتة.  
 فإذا كانت سرعة الجرافة التي تزيحه من الشوارع تتناسب عكسياً مع ارتفاع  
 الثلج المتراكم، وبدأت عملها الساعة ١١ صباحاً، وفي الساعة ٢ بعد

الظهر كانت قد ازاحت الثلج عن ٤ أميال من الطريق، وفي الساعة ٥ كانت قد أخلت ميلين آخرين. متى بدأ الثلج يسقط؟

٢٥. صهريج كبير مفتوح على شكل نصف كرة قطرها خمسون قدماً، وهو مملوء بالماء، وفي آخره ثقب مستدير قطره قدمان. فحسب قانون توريشلي<sup>(\*)</sup>، يتدفق الماء من الثقب بسرعة تعادل سرعته لو سقط سقوطاً من سطح الماء الى موضع الثقب. كم يمضي من الزمن حتى ينفذ ماء الصهريج؟

٢٦. في التمرين ٢٥: صف هيئة الصهريج عندما ينخفض سطح الماء فيه بسرعة ثابتة.

٢٧. جيء الملك تراتسلفانيا وملكتها بفنجانين من القهوة الساخنة ومعها الحليب البارد. اما الملك فوضع في فنجاناه ملعقة من الحليب فوراً وانتظر. واما الملكة فانتظرت عشر دقائق ثم أضافت الحليب (على درجة الحرارة نفسها) الى فنجانها، ثم شربا معاً. أي الفنجانين يكون أسخن، {إرشاد: استخدم قانون نيوتن في التبريد، وافرض ان درجة حرارة الحليب أقل من درجة حرارة الهواء}.

## (٢-١) طرق التعويض

نقدم في هذا البند ثلاثة أشكال من التعويض تفيد أحياناً في حل معادلات تفاضلية.

(\*) ايغاجيلستا توريشلي (١٦٠٨ - ١٦٤٧) كان فيزيائياً إيطالياً.

نفرض أن لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، بالصيغة.

$$\frac{دص}{دس} = ق \left( \frac{ص}{س} \right) ; \dots\dots\dots (١-٢١)$$

أي أن طرفها الأيسر دالة للمتغير ص/س فمن الطبيعي أن نجرب تعويض ع = ص/س. ولأن ص يعتمد على س، فكذلك ع. فإذا فاضلنا ص = س ع بالنسبة إلى س ينتج:

$$\frac{دص}{دس} = ع + س \frac{دع}{دس} \dots\dots\dots (١-٢٢)$$

ونعوض ع = ص/س ونستعويض عن الطرف الأيمن في (١-٢١) بالطرف الأيسر في (٢٢-١) فينتج:

$$ع + س \frac{دع}{دس} = ق(ع).$$

ويمكن فصل المتغيرين في هذه المعادلة، لأن:

$$س \frac{دع}{دس} = ق(ع) - ع.$$

فيكون

$$\frac{دع}{دس} = \frac{ق(ع) - ع}{ع}$$

ويمكن الآن الحصول على الحل كاملاً بمكاملة طرفي المعادلة ثم نستعويض عن ع بقيمتها ص/س والمثال التالي يوضح هذه الطريقة:

# المثال (١)

دس = م - ص  
دس = م + ص

بقسمة البسط والمقام في الطرف الأيسر على م ينتج:

$$\frac{دس}{دس} = \frac{م - ص}{م + ص} = \frac{(م/ص) - ١}{(م/ص) + ١} = \frac{ع - ١}{ع + ١} = ق (ع).$$

فستعوض عن الطرف الأيمن بالعبار ء + م (دع/دس)، ونفصل

المتغيرين، فينتج بعد التعديل الجبري:

$$\frac{دس}{م} = د ( \frac{ع + ١}{ع^٢ - ع - ١} )$$

ويعد التكامل ينتج:

لي (١ - ع - ع٢) = ٢ - لي م + د = لي دس٢، فنرفع ونعوض  
عن ع بقيمتها ص/ م فينتج الاقتران الضمني.

$$\frac{دس}{م} = \frac{٢ - لي م}{م} - \frac{ع}{م}$$

فنضرب في م٢ وينتج م٢ - لي م - ص = ص٢ د

وهناك تعويض آخر يفيد المعادلات التي من النوع

$$\frac{دس}{دس} = ق (١ + ب ص + د) ..... (٢٣-١)$$

حيث ١، ب، د، أي ثوابت حقيقية، فإذا عوضنا ع = ١ + ب ص + د

في المعادلة (٢٣-١)، ينتج

$$\frac{١ - ع}{ب} = ق (ع).$$

لأن ع = ١ + ب ص والمتغيران في هذه المعادلة قابلان للفصل

المثال (٢):

$$\frac{دص}{دس} = (س + ص + ١) - ٢ = ٢ - ٢ = ٠ \text{ نضع } ع = س + ص + ١, \text{ فيكون } ع = ١ + ص,$$

أي أن  $ع = ١ - ٢ = ٢$  فيكون  $ع = ٢ - ١ = ١$ ، وهذا يمكن أن يكتب بالصيغة:

$$دس = \frac{دع}{١ - ٢ع} = \frac{١}{٢} \left( \frac{١}{١ + ع} - \frac{١}{١ - ع} \right)$$

نكامل فنجد أن لـ  $\{ (١ - ع) / (١ + ع) \} = ٢س + ج$  فيكون  
 $(١ - ع) / (١ + ع) = ٢س + ج$

ومن هذا يتج بعد التعديل الجبري:

$$\frac{س + ص + ١}{١ - ع} = ع = ١ + س + ص$$

وهناك تعويض ثالث يغير في المعادلات التي من النوع:

$$\frac{دس}{دص} = ق = \left( \frac{س + ب + ص + ج}{ع + ص + ب + \alpha} \right), \alpha \neq ٠ \dots \dots \dots (٢٤-١)$$

ويلاحظ أنه إذا كان ج، لا صفراً كان بالإمكان أن يكتب الطرف الأيسر

من (٢٤-١) بالشكل

$$ق = \left( \frac{س + ب + ص}{ص + ب + س + \alpha} \right) = \left( \frac{١ + ب(ص/س)}{١ + \alpha(ص/س)} \right) = ك \left( \frac{ص}{س} \right),$$

وهذا دالة للتغير ص / س، ولذا يمكن أن تحل المعادلة بالطريقة التي بها

حللنا المعادلة (٢١-١) فلنصنع  $س = ك + هـ + ص = ل + و$ ، ولنختار هـ  
ويجئ يكون الطرف الأيسر في (٢٤-١) مساوياً

في  $\left( \frac{ك + ب}{ل + B + \alpha} \right)$  وهذا الاختيار ممكن دائماً، وهناك اختيار وحيد يفي  
بالمطلوب، وذلك محل المعادلتين الآتيتين:

$$أهـ + ب = و - ج$$

$$أهـ + B = و - \gamma$$

لإيجاد هـ ولأن عدة أ  $B - \alpha$  ب  $\neq ٠$ ، والآن

$$\frac{دص}{دس} = \frac{د(و + ج)}{دك} \cdot \frac{دك}{دس} = \frac{دك}{دس} ، فتعبر المعادلة (٢٤-١):$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{د(ك + ب + \alpha)}{ل + B + \alpha} = \frac{د(ك + ب + \alpha)}{ل + B + \alpha} \cdot \frac{ل}{ل} = \frac{د(ك + ب + \alpha)ل}{(ل + B + \alpha)ل} ، وهذه المعادلة تنطبق$$

عليها الطريقة الأولى

المثال (٣):

$$\frac{دص}{دس} = \frac{س - ص - ٥}{س + ص - ١} ، \text{ محل المعادلتين } هـ = و - ٥ ، هـ + و = ١$$

فيكون هـ = ٣، و = ٢ فيكون التعويض:  $س = ك + ٣$ ،  $ص = ل - ٢$ ،

ويكون:

$$\frac{دك}{دو + ك} = \frac{ك - ل}{ل} \text{ وقد رأينا من المثال (١) أن حل هذه المعادلة هو:}$$

$$ك^٢ - ٢ك - ل - ٢ل = ح. \text{ فحل المعادلة الأصلية هو:}$$

$$ح = {}^2(٣ - ص) {}^2(٣ - ص) - {}^2(٣ - ص) (٣ - ص) (٣ - ص) = {}^2(٣ - ص) (٣ - ص) (٣ - ص) - {}^2(٣ - ص) (٣ - ص) (٣ - ص) = ٠$$

في المعادلة (٢٤-١)، إذا كان  $\alpha = B + ص$ ، نضع  $ع = ب + ص$ ،

$$\alpha = \frac{B}{ب} \text{ فيكون}$$

$$صB + \alpha = صB + ص \frac{B}{ب} = ع \frac{B}{ب}$$

فنعرض عن  $ب + ص$ ،  $\alpha$  في  $B + ص$  في (٢٤-١) بالعبارتين ع،

$$\frac{B}{ب} ع \text{ على الترتيب، فيصبح } \frac{ع}{دص} = ب ق \left( \frac{ع + ع}{Y + ع(ب/B)} \right) + ١، \text{ لأن}$$

$ع = ب + ص$  ومتغيراً هذه المعادلة يمكن فصلها

المثال (٤):

$$\frac{دص}{ص} = \frac{١ + ص + ص}{١ - ص + ص} \text{ نأخذ } ع = ص + ص، \text{ فيكون } ع = ١ + ص$$

$$\frac{ع}{دص} = \frac{ع}{ص} \text{ بعد المعالجة الجبرية ينتج: } \frac{ع}{١ - ع} = \frac{ع}{ص}$$

بعد فصل المتغيرين ينتج  $ع = ٢$  - لي  $ع = ٣$  + ج أي أن  $ص + ص =$

ج ص (٢ - ص) والجدول التالي يحمل نتائج هذا البند:

المعادلة الجبلية	التعويض	شكل المعادلة
$\frac{دع}{س} = \frac{ع - (ع)ق}{س}$	$\frac{ص}{ع}$	$\frac{دص}{س} = \frac{ق(ص)}{س}$
$\frac{دع}{س} = \frac{ب(ق(ع) + 1)}{س}$	$ع = 1 + ب + ص + ج$	$\frac{دص}{س} = \frac{ق(1 + ب + ص + ج)}{س}$
		$\frac{دص}{س} = \frac{ق(1 + ب + ص + ج)}{س}$
$\frac{دع}{س} = \frac{ب(ق(ع) + 1)}{س}$ $\frac{دل}{دك} = \frac{ق(1 + ب + ص + ج)}{دك}$	$ع = 1 + ب + ص$ $ص = ك + هـ^{(٥)}$ $ص = ل + و$	$\alpha = Bhj$ $\beta \neq Bhj$

### التمارين (١-٢) :

في التمارين ١ الى ١٢ أوجد الحل العام لكل معادلة إذا أمكن، وإلا فأوجد علاقة يعرف بها الحل ضمناً فإذا أعطي شرط ابتدائي فأوجد الحل الخاص الذي يحققه.

$$١. \text{ ص د ص} - \text{ص د س} = \sqrt{\text{ص س ص د س}}$$

$$٢. \frac{\text{ص}}{\text{ن}} + \frac{\text{ص}}{\text{ن}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

$$٣. (\text{ص هـ} - \text{ص س} + \text{ص د س}) = \text{ص د س} = \text{ص د ص}, \text{ ص} = (١) = ٠$$

$$٤. (\text{ص}^٢ + \text{ص}^٢) \text{ ص د ص} = \text{ص د ص}, \text{ ص} = (-١) = ٠$$

$$٥. \frac{\text{ن د ص}}{\text{د ن}} + \text{ص} = \sqrt{\text{ص ن}}$$

$$٦. (س + ع) د س = س د ع$$

$$٧. (ص - ٢ س ص) د س + (٢ س ص - س) د ص = ص (١) = ٢$$

$$٨. (س + ص) د س + ٣ س ص د ص = ٠$$

$$٩. ٢ س + ٢ ص + ٢ س ص د س = س د ص - ص د س$$

$$١٠. (س ص + د س ص - ص) د س - (٢ ص - س ص + س) د ص = ص = ٠$$

$$١١. ص = \frac{س + ٢ س ص}{٢ س}, ص (١) = ١$$

$$١٢. ص = \frac{س - ن ص - (س/ن)^٢}{ن}, ص (١) = ٤/\pi$$

١٣. حل المعادلات التالية:

$$(أ) ٢ د ص = س + ٤ س ص + ٤ ص + ٣$$

$$(ب) (س + ص - ١) د س + ٩ د ص = ٠$$

$$(ج) (س + ص) د ص = (٢ س + ٢ ص - ٣) د س$$

١٤. استعمل نتائج هذا البند في حل ما يلي:

$$(أ) (س + ٢ ص + ٢) د س + (٢ س - ص) د س = ٠$$

$$(ب) (- ص + ١) د س + (س + ص) د ص = ٠$$

$$(ج) (س + ص + ٤) د س = (٢ س + ٢ ص - ١) د ص, د ص = ٠$$

## ١٥. حل المعادلة

د ص =  $\frac{ص - ١}{ص^٢}$  ، بتعويض ع = ص / ص<sup>٢</sup> واختيار قيمة مناسبة للرمز ن.

١٦. استعمل طريقة التمرين ١٥ في حل:

$$\frac{ص - ن}{ص + ن} = \frac{ص}{ن}$$

## (٣-١) المعادلة الخطية.

تعد المعادلة ذات الرتبة ن خطية إذا أمكن أن تكتب بالصيغة:

$$\frac{ص}{د} + \frac{ص}{د} + \dots + \frac{ص}{د} + \frac{ص}{د} = ق(ص)$$

فمعادلة الرتبة الأولى الخطية صيغتها:  $\frac{ص}{د} + \frac{ص}{د} = ق(ص)$

ومعادلة الرتبة الثانية الخطية صيغتها:

$$\frac{ص}{د} + \frac{ص}{د} + \frac{ص}{د} = ق(ص)$$

وفي هذا كله تشير ا(ص)، ب(ص)، ق(ص) الى اقترانات في ص فقط

وقبل البدء بمعالجة معادلة الرتبة الأولى الخطية العامة:

$$\frac{ص}{د} + \frac{ص}{د} = ق(ص) ، ..... (٢٥-١)$$



نوضح بعض الحالات الخاصة إذا كان  $Q = 0$ ، وكان  $P = 1$  (عدداً ثابتاً)، تصبح المعادلة (٢٥-١):

$$0 = 1 + \frac{dP}{dS} \dots\dots\dots (٢٦-١)$$

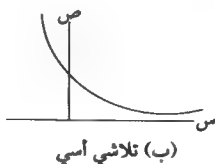
فبفضل المتغيرين ينتج  $\frac{dP}{dS} = -1$  وبالتكامل ينتج لي:  
 $P = -S + C$  أي أن:

$$P = -S + C \dots\dots\dots (٢٧-١)$$

فإذا كانت  $P$  موجبة كانت المعادلة (٢٧-١) معادلة التلاشي الأسّي  
 exponential decay

وإذا كانت  $P$  سالبة فالمعادلة (٢٧-١) هي معادلة التزايد الأسّي  
 exponential growth

كما يبينه الشكل (٢-١) (أ)، (ب)



الشكل (٢-١)

المثال (١):

بيئة تزايد عدداً بمعدل ١٠٪ في وحدة الزمن، وقد كان عددها في البدء ١٠٠٠، فإذا كان عددها ع (ن) في اللحظة ن، بمعادلة تزايدها هي

$$\frac{د}{ن} = ١٠٠٠ ع \text{ أي } \frac{د}{ن} = ١٠٠٠ ع \text{ و } ١٠٠٠ ع = ١٠٠٠$$

وهذه هي المعادلة (١-٢٦) وفيها ١ = ١٠٠٠ ع، وحلها العام ع (ن) = ١٠٠٠ ع

نضع ن = ١٠٠٠ فيتبع ع (١٠٠٠) = ١٠٠٠ ع. فحل المسألة إذن هو ع (ن) = ١٠٠٠ ع

فمثلاً إذا كانت وحدة الزمن الأسبوع، فالعدد بعد ١٠ أسابيع هو ع (١٠) = ١٠٠٠ ع ≈ ٢٧١٨ ع.

لنبحث الآن في مسألة أعم هي:

$$\frac{د}{دص} + ١ ص = ق (ص) \dots\dots\dots (١-٢٨)$$

يستحيل هذا فصل المتغيرين ولكن هناك طريقة سهلة لحل (١-٢٨)، وذلك بضرب طرفي المعادلة بعامل تكامل integrating Rector

فلأن:

$$\frac{د}{دص} + ١ ص = ق (ص) \text{ فيمكن ضرب طرفي (١-٢٨) في } \left( \frac{د}{دص} + ١ ص \right)^{١٠} \text{ في } ١٠ \text{ فيتبع:}$$

$$(29-1) \dots\dots\dots \text{هـ}^1 \text{ ق (س)} = \left( \text{ص} + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \right)^{\text{ص}^1} = \frac{\text{د}}{\text{دس}} (\text{هـ}^1 \text{ ص})$$

نكامل الطرفين من (1-29) فينتج:

$$(30-1) \dots\dots\dots \text{هـ}^1 \text{ ص} = \text{هـ}^1 \text{ ق (س)} \text{ دس} + \text{ج} \dots\dots\dots$$

أي أن

$$(30-1) \dots\dots\dots \text{ص} = \text{هـ}^1 \text{ ص} [ \text{ق (س)} \text{ هـ}^1 \text{ دس} + \text{ج} ] \dots\dots\dots$$

$$(31-1) \dots\dots\dots \text{ص} = \text{هـ}^1 \text{ } [ \text{ق (س)} \text{ هـ}^1 \text{ دس} + \text{ج} ] \dots\dots\dots$$

المثال (2):

خذ المعادلة د ص / دس + ص<sup>2</sup> = س. عامل التكامل هنا هـ<sup>ص</sup>

فحسب المعادلة (1-30) نجد:

$$(32-1) \dots\dots\dots \text{هـ}^{\text{ص}^2} \text{ ص} = \text{هـ}^{\text{ص}^2} \text{ ق (س)} \text{ دس} + \text{ج} \dots\dots\dots$$

نكامل الطرف الأيسر من (1-32) بالأجزاء فينتج:

$$\text{هـ}^{\text{ص}^2} \text{ ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{ص}^2}}{\frac{1}{\text{ص}}} - \frac{\text{هـ}^{\text{ص}^2}}{\frac{1}{\text{ص}}} \text{ دس} + \text{ج}$$

$$\text{هـ}^{\text{ص}^2} \text{ ص} = \left[ \frac{1}{\text{ص}} \text{هـ}^{\text{ص}^2} - \frac{1}{\text{ص}} \text{هـ}^{\text{ص}^2} \text{ دس} + \text{ج} \right] \text{هـ}^{\text{ص}^2}$$

أي أن:

$$\text{ص} = \left[ \frac{1}{\text{ص}} \text{هـ}^{\text{ص}^2} - \frac{1}{\text{ص}} \text{هـ}^{\text{ص}^2} \text{ دس} + \text{ج} \right] \text{هـ}^{\text{ص}^2}$$

نعود الآن إلى المعادلة (٢٥-١)، ذات الرتبة الأولى، الخطية، العامة، فلأن التفاضل والتكامل عمليتان متعاكستان، يكون

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

$$\text{ولأن } \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} \text{ فإن } \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{فإن } \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} \text{ فإن } \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

يتضح أن  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$  عامل تكامل مناسب للمعادلة (٢٥-١) نضرب طرفي (٢٥-١) بهذا العامل، فنجد أن:

$$\left[ \frac{1}{x} \right] \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = \left( -\frac{1}{x^2} \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$= \left[ \frac{1}{x} \right] \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = \left( -\frac{1}{x^2} \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) \dots \dots \dots (٣٤-١)$$

والمعادلة (٣٤-١) تؤكد ما ذكرناه في مطلع هذا الفصل، من مقدرتنا على حل معادلة الرتبة الأولى، (٢٥-١) تعتمد كلياً على مقدرتنا على إجراء التكاملات في (٣٤-١).

المثال (٣): حُلْ

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

نلاحظ أن المعادلة (٣٥-١) تشابه شكل المعادلة (٢٥-١) لكن

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$



١ = ص (١) = ج هـ<sup>-١</sup>، أي ان ج هـ = فيكون حل المسألة

$$ص = \frac{1}{٣} (س - ١) + هـ^{-١} س^{-١}$$

المثال (٥) = التغذية في الوريد بالجلوكوز: ان حقن الجلوكوز في مجرى الدم تقنية طبية هامة. فلدراسة هذه العملية لنجعل ج (ن) ترمز الى كمية الجلوكوز في مجرى الدم لمريض في اللحظة ن. ولنفرض ان الجلوكوز يحقن في مجرى الدم بسرعة ثابتة هي ك غرامات في الدقيقة. وفي الوقت ذاته يجري تحول الجلوكوز وخروجه من مجرى الدم بسرعة تتناسب مع كميته في الدم. فالافتراض ج (ن) يحقق العلاقة:

$$\frac{دج}{دن} = ك - ج$$

حيث ك ثابت موجب فلحل هذه المعادلة نكتبها دج/دن + ج = ك، ثم نضرب الطرفين بعامل التكامل هـ<sup>ك</sup>.

فالحل هو ج (ن) = ج هـ<sup>ك</sup> + ك/١، وعند ن = ٠ يكون

$$ج = (٠) - ك/١.$$

فيكتب الحل اذن بالصيغة:

$$ج (ن) = \frac{ك}{١} - \left( \frac{ك}{١} - (٠)ج \right) ه^{-ك}$$

فعندما ن  $\rightarrow \infty$ ، فان تركيز الجلوكوز يقارب القيمة التي يستقر عليها وهي ك/١.

### التمارين (١-٣):

في التمارين ١ الى ١١ أوجد الحل العام لكل معادلة. فاذا أعطيت شرطا ابتدائيا، فأوجد الحل الخاص الذي يحققه:

$$١. \frac{دس}{دن} = ٣$$

$$٢. \frac{دس}{دس} + ٢٢ص = ٢٠ص (١) = ٢$$

$$٣. \frac{دس}{دن} = ص + ١، ص (٠) = ١$$

$$٤. \frac{دس}{دس} + ص = ص + ج، ص (٠) = ٠$$

$$٥. \frac{دس}{دس} - س لي ص = ص$$

$$٦. \frac{دس}{دس} + ص = (١ + هـ٢)١$$

$$٧. \frac{دس}{دس} - \frac{ص٣}{ص} = ص٢، ص (١) = ٤$$

$$٨. \frac{دس}{دن} + ص ظتا ن = ٢ ن قتا ن$$

$$٩. س - ٢ = ص ن هـ٢$$

$$١٠. ص + \frac{ص٢}{ص} = \frac{جتا ص}{ص}، ص (٣) = ٠$$

$$١١. \frac{دس}{دي} + ص = ي هـ٤ + ١$$

١٢. حل المعادلة. ص - مس  $\frac{دص}{دس} = \frac{صه}{دس}$  بتبديل وظيفتي س، ص  
(أي اعتبار س هو التابع).

١٣. استعمل طريقة التمرين ١٢ في حل  $\frac{دص}{دس} = \frac{صه}{دس} / (١ - س)$ .

١٤. أوجد حل المعادلة  $دص / دس = ٢ (٢ - ص)$  الذي يمر في النقطة (٠، ١)

١٥. لنفرض أن ح (د ن) هو الفرق في درجة الحرارة في اللحظة ن بين جسم ما والوسط الذي يحيط به فحسب قانون نيوتن في التبريد  $دح / د ن = - ك$  ح، حيث  $ك > ٠$ ، فاحسب بدلالة ك الوقت اللازم حتى ينخفض الفرق بين درجتي الحرارة:

(أ) الى نصف قيمته الابتدائية.

(ب) الى ربع قيمته الابتدائية.

١٦. في تفاعل كيميائي تنتج المادة الكيميائية ك بسرعة، مولات في الدقيقة، وتستهلك في الوقت نفسه بسرعة جـ مولات في الدقيقة لكل مول من ك. وليكن (ن) هو عدد المولات المتوفرة من هذه المادة في اللحظة ن:

(أ) أوجد معادلة تفاضلية تعبر عن قيمة ك (ن)

(ب) أوجد ك (ن) بدلالة ك (٠).

(ج) أوجد كمية هذه المادة عندما تصل حالة الاستقرار.

١٧. انتشر مرض سار في مجتمع كثير السكان، فصارت نسبة المصابين به تتزايد مع الزمن. فإذا كانت:

ع (ن) هي نسبة المصابين بعد ن سنوات، وكان



ع<sup>(ن)</sup> = {ع<sup>(ن)</sup> - ١} / ٣، ع<sup>(٠)</sup> = ٠، فبعد كم سنة تصبح نسبة المصابين ٩٠ في المئة؟

### (٤-١) معادلات خاصة لا خطية:

يمكن ان تحول بعض المعادلات غير الخطية ذات الرتبة الاولى الى معادلات خطية باجراء تغيير مناسب على المتغيرات: فالمعادلة من هذا النوع، وتسمى بمعادلة برنولي

$$\frac{دص}{دس} + (س) = ق (س)، ص^٥، ..... (٣٦-١)$$

ضع ع = ص<sup>١-٥</sup>، فيكون ع<sup>(١-٥)</sup> = ص<sup>٥</sup>. فاذا اضربنا طرفي (٣٦-١) في (١-٥) ص<sup>٥</sup>، فينتج (١-٥) ص<sup>٥</sup> + (١-٥) ص<sup>١-٥</sup> = (١-٥) ق.

أي ان:

$\frac{دع}{دس} + (١-٥) = ق (س)$  وهذه معادلة خطية يمكن ان تحل كما تقدم.

المثال (١):

$$\frac{دص}{دس} - \frac{٥-}{٢} = ٢ص^٢، ..... (٣٧-١)$$

هنا: ن = ٣، فليكن ع = ص<sup>٢-١</sup>، ع<sup>١-٢</sup> = ٢- ص<sup>٢</sup>، فنضرب المعادلة (٣٧-١) في ٢- ص<sup>٢</sup> ينتج





$$\bar{ع} + \frac{\bar{ص}}{ع} = \bar{ع} \text{ من } \bar{ص}$$

وقد رأينا من المثال (٣) من البند (٣-١) السابق، أن لهذه المعادلة حلا هو

$$\bar{ص} = \bar{ع} = \bar{ص} + \bar{ج} \text{ من } \bar{ص}$$

$$\bar{ص} \text{ فيكون } \bar{ص} = (\bar{ص} + \bar{ج} \text{ من } \bar{ص})^{1/2}$$

ونتبع مثل هذا الاجراء في المثال التالي:

المثال (٢): حل

$$\bar{ص} + \frac{\bar{د}}{\bar{ص}} + \bar{ص} = \bar{ق} \text{ (س) من لي } \bar{ص} \dots\dots\dots (١ - ٣٨)$$

نجعل  $\bar{ع} = \bar{لي} \text{ من } \bar{ص}$ . فيكون  $\bar{ع} = \frac{\bar{ص}}{\bar{ص}}$ ، فإذا قسمنا (١ - ٣٨) على  $\bar{ص}$  نتج

المعادلة الخطية

$$\bar{ع} + \bar{ص} + \bar{ق} \text{ (س) من } \bar{ع} \text{ والمعادلة}$$

$$\bar{ص} + \frac{\bar{د}}{\bar{ص}} + \bar{ص} = \bar{ب} \text{ (س) من } \bar{ص} \dots\dots\dots (١ - ٣٩)$$

لاخطية، وتسمى معادلة ريكاتي (Riccati)، وهي ترد كثيراً في التطبيقات الفيزيائية، ويمكن أن تحل بتعويض بسيط يحولها الى معادلة خطية: ليكن

$$\bar{ص} = \bar{ع} / \bar{ع} \text{ فيكون } \bar{ع} = \bar{ع} \text{ من } \bar{ص} = \bar{ع} + \bar{ص} \text{ من } \bar{ص}$$

ولكن باستعمال التعويض الأصلي نجد أن:

$$\bar{ص} = \bar{ع} = \frac{\bar{ع}}{\bar{ع}} = \frac{\bar{ع}}{\bar{ع}} = \bar{ع} \text{ من } \bar{ص}$$

$$\bar{ع} = \bar{ع} + \bar{ص} \text{ من } \bar{ص}$$



يتضح الآن أن ضرب المعادلة (١-٣٩) في ع قد ينتج نتائج شائقة:

$$ع + ا (س) ع + ب (س) ع = ع ص^2 + ا ع ص + ب ع =$$

فبهذا التعويض حولنا معادلة راكبي الى معادلة خطية من الرتبة الثانية هي

$$ع + ا (س) ع + ب (س) ع = ٠$$

وهذه سنحلها في ما بعد في الحالة الخاصة عندما يكون ا (س)، ب (س)

ثابتين

ومن معادلات المرتبة الأولى البالغة الأهمية معادلة كليرود (clairaut)

وهي:

$$ص = ص + ق (ص) ..... (١-٤٠)$$

نفاضل الطرفين بالنسبة الى س فينتج:

$$ص = ص + س ص + ق (ص) ص،$$

وقد حصلنا على الحد الأخير بطريقة السلسلة، نحذف الحدود المتشابهة

فيبقى:

$$(س + ق (ص)) ص = ٠ ..... (١-٤١)$$

ولأن أحد العاملين يجب أن يكون صفراً، فهناك حالتان:

أ. إذا كان ص = ٠، يكون ص = ج فنعوض هذا في المعادلة (١-٤٠)

وينتج الحل العام

$$ص = ج س + ق (ص)، ..... (١-٤٢)$$



وهذا مجموعة خطوط مستقيمة.

ب. وإذا كان  $س + ق = (ص)$ ،  $٠ = (ص)$ ، يكون  $س = - ق = (ص)$ ، وعندها يمكن أن نكتب المعادلة  $(٤٠-١)$

بالصيغة:

$$ص = ق = (ص) - ص = ق = (ص) \dots\dots\dots (٤٣-١)$$

هنا نجد أن كلاً من  $س$ ،  $ص$  قد عَبر عنه بدلالة  $ص$ . فلنجعل  $ص = ن$ ، وبهذا نحصل على المعادلتين الوسيطتين:

$$س = - ق = (ن)، ص = ق = (ن) - ن = ق = (ن) \dots\dots\dots (٤٤-١)$$

ويجب ان نتحقق من أن نقاط هذا المنحنى تحقق المعادلة  $(٤٠-١)$  فلأن

$$ص = \frac{د ص / د ن}{د س / د ن} = \frac{ق(ن) - ن ق(ن)}{ق(ن) - ن} = ن،$$

فإن ميل المنحنى عند أي نقطة يساوي الوسيط  $ن$ ، شريطة أن يكون  $ق(ن) \neq ٠$ . نعوض بدل  $ص$ ،  $ق(ن)$  بدل  $س$  في  $(٤٤-١)$  فنتج المعادلة  $(٤٤-١)$  شريطة أن  $ق(ف) \neq ٠$ . والمعادلة  $(٤٤-١)$  ليست حالة خاصة من الحل العام  $(٤٢-١)$ ، لأن  $ص$  في الحل العام ثابت، في حين أنه في  $(٤٤-١)$  يعتمد على الوسيط  $ن$ . والحل الخاص  $(٤٤-١)$  يسمى حلاً منفرداً (singula) للمعادلة  $(٤٠-١)$

المثال (٣): حل

$$ص = س ص + (ص)^2 \dots\dots\dots (٤٥-١)$$





حسب (٤٢-١) ك إن الحل العام هو  $ص = د س + ق (س) = ج - س + س^٢$ . ولأن  $ق (ن) = ن^٢$

فالمعادلات الوسيطة للحل المنفرد هي:

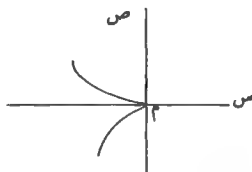
$$س = ٣ - ن^٢, \quad ص = ن^٢ - (٣ ن^٢) = -٢ ن^٢, \quad ن = ٠ \neq ٠ \dots (٤٦-١)$$

{ عند  $ن = ٠$  يكون  $ق (٠) = ٠$  } نلحذف الوسيط ن فينتج

$$٤ س^٢ = ١٠٨ - ن^٦ = ٢٧ - ص^٢, \dots (٤٧-١)$$

فإذن  $٤ س^٢ = ٢٧ - ص^٢$  حل منفرد للمعادلة (٤٥-١)، الا عند النقطة  $(٠, ٠)$  حيث لا وجود للمشتقة  $ص'$

انظر الشكل (٣-١) لاحظ أن الحل العام لا يشمل هذا الحل المنفرد



المثال (٤) خذ المعادلة:

$$س ص - ه ص - ص = ٠$$

فنكتبها بالصيغة:

$$ص = س ص - ه ص \dots (٤٨-١)$$



فالحل العام هو  $ص = ح - س - هـ$ ، والحل المنفرد

$$س = هـ^0، ص = هـ^0 (ن - 1)$$

فيكون  $ن = لي س$ ، وهذا معرف شريطة ان يكون  $س < 0$ ، فالحل المنفرد

إذن:

$$ص = س (لي س - 1)، س < 0$$

التمارين (١-٤)

١. حول المعادلات اللاخطية التالية الى معادلات خطية من الرتبة الثانية:

$$(أ) ص + ص^2 = 1 - 0$$

$$(ب) 0 = 1 + 2س + \frac{س^2}{ن}$$

$$(ج) ص + ص^2 + ص^3 = 1 - 0$$

٢. في المعادلة اللاخطية  $ص + أ + ب + ح = 1$ ، أ، ب، ح

ثوابت اعتباطية. حول هذه المعادلة إلى معادلة خطية من الرتبة الثانية في

التمارين ٣ الى ١١ أوجد الحل العام لكل معادلة وأوجد حلاً خاصاً علماً

أعطيت شرطاً ابتدائياً

$$٣. \frac{د - (ص^2 - س - 1)س}{س^2} = \frac{د - 1}{س}$$

$$٤. س^6 + 1 = س^0$$

$$٥. ص - ص^3 = ص^2 - س + ص$$

$$٦. \frac{د ص}{د م} = \frac{جا^٢ م + جتا^٢ ص}{٢ ظا م جا ص جتا ص}، \left(\frac{\pi}{٢}\right) ص = ٠$$

$$٧. (٢ ص^٢ - م^٢) د م + ٣ م ص^٢ د ص = ٠، ص (١) = ١$$

$$٨. م \frac{د ص}{د م} + ص = م^٤ ص^٢، ص (١) = ١$$

$$٩. ن م \frac{د ن}{د م} + م^٢ = ن جتا ن$$

$$١٠. \frac{د م}{د م} + \frac{٣ م}{م} = م^٢ ص^٢، ص (١) = ٢$$

$$١١. م ص ص - ص^٢ م + م^٢ = ٠$$

في التمارين ١٢ الى ١٨ أوجد الحل العام والحل المنفرد لكل معادلة

$$١٢. ص = م \frac{د م}{د م} + \frac{١}{٤} \left(\frac{د م}{د م}\right)$$

$$١٣. ص = م \frac{د م}{د م} - \frac{١}{٢} \left(\frac{د م}{د م} - \frac{١}{٤}\right)$$

$$١٤. ص = م \frac{د م}{د م} - \frac{١}{٤} \frac{د م}{د م}$$

$$١٥. ص = م \frac{د م}{د م} + \frac{١}{٢} \left(\frac{د م}{د م}\right)$$

$$١٦. (ص - م ص) - (ص) = ١$$

$$١٧. ص = م ص - b$$

$$١٨. ص = م ص + ل ي ص$$

## (٥-١) المعادلات المحكمة Exact Equations

سنستعمل الآن المشتقات الجزئية لحل معادلات تفاضلية عادية.

لنفرض اننا اخذنا التفاضلية الكلية للمعادلة ج (س، ص) = ث، ففتح:

$$\text{دج} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \text{س}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \text{ص}} \text{د ص} = ٠ \dots\dots\dots (٥٠-١)$$

فمثلاً المعادلة س ص = ث تعطي التفاضلية الكلية ص د س + س د ص = ٠، وهذه معادلة تفاضلية تكتب على النحو ص' = - ص/س. والآن نعكس هذه الخطوات، فنبدأ من المعادلة التفاضلية:

$$٣ (س، ص) \text{د س} + ن (س، ص) \text{د ص} = ٠ \dots\dots\dots (٥١-١)$$

فهل نستطيع أن نجد اقتراناً ج (س، ص) بحيث يكون:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \text{س}} = \text{م}، \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \text{ص}} = \text{ن}$$

إذا تم ذلك لتصبح (٥١-١): دج = ٠، ويكون ج (س، ص) = ث هو الحل العام للمعادلة (٥١-١) وفي هذه الحالة نقول أن م د س + ن د ص هي تفاضلة محكمة وأن (٥١-١) هي معادلة تفاضلية محكمة.

وكيف نعرف إذا كانت المعادلة التفاضلية محكمة؟ نذكر من دراستنا لاساسيات الحسبان:

إذا وجد الطرفان وكانا متصلين فبدلالة الاقترانين م، ن تصبح المعادلة (٥٢-١) كما يلي:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \text{س} \partial \text{ص}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \text{ص} \partial \text{س}} \dots\dots\dots (٥٢-١)$$

فالشرط (٥٣-١) هو الشرط اللازم لأن تكون (٥١-٢) حكمة وسنرى  
ان (٥٣-١) هو أيضاً كافٍ وذلك بأن نبين كيف نحصل على الاقتران ج الذي  
يحقق (٥١-١) والطريقة ذات خطوتين:

أولاً: أوجد تكامل الاقتران  $\int \frac{S}{J} = \frac{S}{J} + C$  بالنسبة الى  $S$ :

$$\int \frac{S}{J} = \int \frac{S}{J} + C = \frac{S}{J} + C \quad (٥٤-١)$$

و ثابت التكامل هو (ص) في (٥٤-١) اقتران في ص لا على التعيين  
نفرضه لأننا نريد أن نضع أعم حد يتلاشى عند مفاضلته بالنسبة الى  $S$ .  
والمسألة الآن هي أن نكتشف فإذا يكون هذا الحد الذي سميناه  $H$  (ص)

ثانياً: نأخذ التفاضلة الجزئية للمعادلة (٥٤-١) بالنسبة الى  $S$ :

$$\frac{S}{J} = \int \frac{S}{J} + C = \frac{S}{J} + C \quad (٥٤-١)$$

فيكون:

$$\frac{S}{J} = \int \frac{S}{J} + C = \frac{S}{J} + C$$

نففاضل داخل التكامل جزئياً ونعوض من  $S/J$  ص بها يساويه

$$\frac{S}{J} = \int \frac{S}{J} + C = \frac{S}{J} + C$$

$$= H(ص)$$

$$\int \frac{S}{J} = \int \frac{S}{J} + C = \frac{S}{J} + C \quad (٥٥-١)$$

فالطرف الأيمن من المعادلة (٥٥-١) اقتران في ص فقط، لأن مشتقته الجزئية بالنسبة الى ص صفر فنكامل طرفي (٥٥-١) فينتج:

$$هـ (ص) = \left[ د \frac{٥٦}{٥} - (ن - د ص + ث. \right.$$

فإذا عوضنا هذا في (٥٤-١) نحصل على الحل العام للمعادلة (٥١-١).

المثال (١):

(١ - جاس ظا ص) دس + (جتا ص قا ص) دص = ٠. هناك  
(ص، ص) = ١ - جاس ظا ص، ن (ص، ص) = جتا ص قا ص فيكون:

$$\frac{٤}{٥} = - جاس قا ص = \frac{٤}{٥} \frac{ن}{ص}$$

فالمعادلة محكمة فلأيجاد الحل نلاحظ أن (٥٤-١) تقتضي أن يكون:

$$ج (ص، ص) = أم دس - هـ (ص) = ص + جتا ص ظا ص - هـ (ص).$$

ف نجد المشتقة الجزئية بالنسبة الى ص، في الطرفين فينتج:

$$جتا قا ص = ن = \frac{٤}{٥} = جتا ص قا ص - هـ (ص).$$

فيكون هـ (ص) = ٠، أي أن هـ (ص) ثابت والحل العام هو:

$$ج (ص، ص) = ص + جتا ص ظا ص + ث = ٠$$

وينبغي أن نلاحظ المعادلات المحكمة نادرة جداً لأن الشرط (٥٣-١) يقتضي توازناً محكماً بين الاقترانين م، ن. فمثلاً

$$(٣ ص + ٢ ص) دس + ص دص = ٠$$

ليست محكمة ولكن إذا ضربنا المعادلة في  $\mu$ ، تصبح المعادلة الجديدة

$$(3 \mu + 2 \text{ ص}) د \text{ ص} + \text{ص}^2 د \text{ ص} = 0 \text{ وهذه محكمة.}$$

فالسؤال الآن هو: إذا كانت

$$م (ص، ص) د \text{ ص} + ن (ص، ص) د \text{ ص} = 0 \dots\dots\dots (56-1)$$

غير محكمة فتحت أي الشروط يكون هنالك عامل تكامل  $\mu (ص، ص)$  بحيث تكون  $\mu م (ص، ص) د \text{ ص} + \mu ن (ص، ص) د \text{ ص} = 0$  محكمة؟  
الجواب: يتم ذلك كلما كانت (56-1) لها حل عام:

$$ج (ص، ص) = ث. ولكي ترى ذلك نجد  $د \text{ ص} / د \text{ ص}$  في المعادلة (56-1)$$

$$\frac{د \text{ ص}}{د \text{ ص}} = \frac{م}{ن} = \frac{ج \text{ ص} / ج \text{ ص}}{ج \text{ ص} / ج \text{ ص}}$$

فمن ذلك يتبع أن:

$$\frac{ج \text{ ص} / ج \text{ ص}}{ن} = \frac{ج \text{ ص} / ج \text{ ص}}{م}$$

فاجعل أياً من طرفي هذه المعادلة  $\mu (ص، ص)$  فيكون

$$\mu = \frac{ج \text{ ص}}{د \text{ ص}} م، \mu = \frac{ج \text{ ص}}{د \text{ ص}} ن \dots\dots\dots (57-1)$$

وللمعادلة (56-1) عامل تكامل واحد على الأقل هو  $\mu$  ولكن الحصول على عوامل التكامل هو على الغالب صعباً جداً. ولذلك طريقة تنجح أحياناً. فبما أن (57-1) تدل على أن  $\mu م د \text{ ص} + \mu ن د \text{ ص} = 0$  محكمة فمن (53-1) يتبع أن:

$$\frac{\mu s}{s} + \frac{n s}{s} \mu = (\mu n) \frac{s}{s} = (\mu m) \frac{s}{s} = \frac{\mu s}{s} + \frac{m s}{s}$$

فيكون

$$(1-58) \dots \frac{n s}{s} - \frac{m s}{s} = \left( \frac{\mu s}{s} - \frac{\mu s}{s} \right) \frac{1}{\mu}$$

فإذا كان عامل التكامل  $\mu$  يعتمد على  $s$  فقط تصبح المعادلة (1-58)

$$(1-59) \dots \text{ك} = \frac{s - n s / s}{n} = \frac{\mu s}{s} - \frac{1}{\mu}$$

ولأن الطرف الأيمن من هذه المعادلة يتكون من اقترانات في  $s$  فقط فإن  
ك تكون بدلالة  $s$  فقط، فإذا كان هذا صحيحاً أمكن إيجاد  $\mu$  لفصل المتغيرين  
في  $\mu (s) = \text{سا}$  {ك (س) د س}. ومثل هذا سيتج إذا كان  $\mu$  اقتراناً في  
 $s$  فقط فعندها يكون

$$\text{ك} = \frac{s - n s / s}{m}$$

هو أيضاً اقتران في  $s$  وهنا يكون  $\mu (s) = \text{سا}$  {ك (ص) د ص}  
هو عامل التكامل.

المثال (٢)

(٣ ص - ٢ ص) د ص - ٢ ص ص د س = ٠ في هذا المثال: م = ٢ -  
س ص، ن = ٣ ص - ٢ ص فيكون

$$\frac{m s}{s} = \frac{2 s}{s}, \text{ ٢ ص، } \frac{n s}{s} = \frac{3 s}{s}$$

فإذن:

$$\frac{٤-}{ص} = \frac{٤/م - ٤/ن}{م}$$

فيكون:

$$\mu = م = [٤ - \frac{٤}{ص}] = م - \frac{٤}{ص}$$

فيصير لدينا:

$$٠ = \frac{٣ص^٢ - ٢ص}{ص^٤} د - \frac{٢ص^٢}{ص^٣} د م$$

وهذه محكمة فالحل العام هو:

$$ج = [م د + هـ (ص)] = \frac{٢ص^٢}{ص} + هـ (ص)$$

فتفاضل هذه المعادلة بالنسبة الى ص فينتج:

$$\frac{٣ص^٢ - ٢ص}{ص^٤} = ن = \frac{٢ص^٣}{ص^٤} + هـ (ص)$$

فيكون هـ (ص) = - ص<sup>٢</sup>، فيكون هـ (ص) = ص<sup>-١</sup> + ث، فينتج أن:

$$ج (م، ص) = \frac{٢ص-}{ص} + \frac{١}{ص} + د = ٠، أي أن د ص + ص<sup>٣</sup> - ص<sup>٢</sup> = ٠$$

التمارين (١-٥)

في التمارين من ١ الى ١١ بين أن كل معادلة تفاضلية محكمة و أوجد حلها

العام، ثم أوجد الحل الخاص حيثما تعطي قيمة ابتدائية.

$$1. \quad 2 \text{ من ص د س} + (\text{س}^2 + 1) \text{ د ص} = 0$$

$$2. \quad \{ \text{س جتا} (\text{س} + \text{ص}) + (\text{س} + \text{ص}) \text{ د س} + \text{س ص} (\text{س}, \text{ص}) \text{ د ص} \}$$

$$0 = \text{ص} (1) / \Pi = 1 - 2.$$

$$3. \quad (4 \text{ من ص}^3 \text{ ص}^3 + \frac{1}{\text{س}}) \text{ د س} + (\text{ع من}^4 - \frac{1}{\text{س}}) \text{ د ص} = 0, \text{ س (هـ)} = 1$$

$$4. \quad \left[ \text{لي (لي من)} + \frac{2}{3} \text{ من ص}^2 \right] \text{ د س} + \left[ \frac{\text{لي من}}{\text{ص لي من}} + \frac{2}{3} \text{ من ص}^2 \right] \text{ د ص} = 0.$$

$$5. \quad (\text{س} - \text{ص جتا س}) \text{ د س} - \text{جا س د ص} = 0, \text{ ص} (\Pi / 2) = 1$$

$$6. \quad (\text{جتا، س جتا}^2 \text{ ص}) \text{ د س} + (\text{جا}^2 \text{ س جا}^2 \text{ ص}) \text{ د ص} = 0$$

$$7. \quad (\text{ص هـ س}^3 + \text{ص}^4 \text{ ص}^2) \text{ د س} + (\text{س هـ س}^3 + \text{س}^2 \text{ ص}^2 - \text{ص}^2 \text{ ص}^2) \text{ د ص}$$

$$0 = \text{ص} (0) = 2$$

$$8. \quad (3 \text{ من}^2 \text{ لي من} + \text{س}^2 - \text{ص}) \text{ د س} - \text{س د ص} = 0, \text{ ص} (1) = 5$$

$$9. \quad (2 \text{ من} + \text{هـ س}) \text{ د س} + (\text{س}^2 + \text{س هـ س}) \text{ د ص} = 0$$

$$10. \quad (\text{س}^2 + \text{ص}^2) \text{ د س} + 2 \text{ من ص د ص} = 0, \text{ ص} (1) = 1$$

$$11. \quad \left( \frac{\text{ص}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} - \frac{1}{\text{س}} \right) \text{ د س} + \left( \frac{1}{\text{ص}} - \frac{\text{من}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} \right) \text{ د ص} = 0.$$

في التمارين من ١٢ الى ١٦ أوجد عامل التكامل لكل معادلة تفاضلية  
ثم أوجد الحل العام

$$12. \quad \text{ص د س} + (\text{ص} - \text{س}) \text{ د ص} = 0$$

$$١٣. (ص^٢ + ص^٢ + ص) د ص + ص د ص = ٠$$

$$١٤. ٢ ص^٢ د ص + (٢ ص + ٣ ص) د ص = ٠$$

$$١٥. (ص^٢ + ص^٢) د ص - ص د ص = ٠$$

$$١٦. (ص^٢ + ص^٢) د ص + (٣ ص) د ص = ٠$$

$$١٧. حل من ص د ص + (ص^٢ + ٢ ص + ٢) د ص = ٠$$

$$١٨. إذا كان م = ص أ (ص)، ن = ص ب (ص)، بين أن أ /$$

$$(ص م - ص ن) هو عامل تكامل للمعادلة م د ص + ن د ص = ٠$$

$$١٩. استعمل نتيجة التمرين ١٨ لحل المعادلة: ٢ ص^٢ د ص + ص^٢ د ص = ٠$$

$$٢٠. حل (ص^٢ + ص^٢ + ١) د ص - (ص ص + ص) د ص = ٠$$

{ إرشاد: جرب عامل تكامل من النوع  $ص(ص) = (ص + ١)^٥$  }

## (٦-١) معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الأولى

معادلة الفرق العامة الخطية ذات الرتبة الأولى هي

$$ص_{ن+١} = ١ + ص_{ن} + ف_{ن}، ..... (٦٠-١)$$

حيث  $١$ ،  $ف_{ن}$  معروفان مع جميع قيم  $ن$ . وقبل البدء بإيجاد القانون العام

لحل المعادلة (٦٠-١) يهتما أن نتفهم وجود المطابقة بين المعادلات التفاضلية

الخطية ونظيرتها من معادلات الفروق فلننظر في معادلة أبسط هي:

$$ص_{ن+١} = ١ + ص_{ن}، ..... (٦١-١)$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة (٦١-١) فإذا قارنا (٦١-١)، (٦٢-١) مع المعادلة التفاضلية ص = ١ ص، وحلها العام ص (س) = جـ هـ<sup>١</sup> يتبين لنا أن ن + ١، ١، ص تناظر على التوالي س، هـ<sup>١</sup>، جـ. فلنفترض أن المعادلة كانت:

$$\text{ص} = 1 + \text{ا} - \text{ا} - 1 + \dots + 1 - \text{ا} + \text{ا} = \text{ص} \left( \prod_{i=1}^n (1 + \text{ا}_i - \text{ا}_i) \right) = \text{ص} \quad (1-1) \dots (1-1)$$

**ولنتظر الآن في المعادلة:**

لأن ص' = ص + ف (س) حلها العام ص = ج هـ + هـ ف (س)



هــ سـ د س فقد اتضح التناظر (تذكر أن  $\prod_{i=1}^n 1 = 1$  تناظر هـ) وأخيراً، ننظر في المعادلة الخطية العامة، ذات الرتبة الأولى:

$$\text{ص } 1 + \text{ص } 2 + \text{ف } 3 + \text{ف } 4 + \dots + \text{ف } n$$

$$\text{ص } 1 = 1 \text{ ص } 2 + \text{ف } 3, \text{ ص } 2 = 1 \text{ ص } 3 + \text{ف } 4, \text{ ص } 3 = 1 \text{ ص } 4 + \text{ف } 5, \dots, \text{ ف } n$$

$$\text{وبوجه عام: ص } 1 + \text{ص } 2 + \dots + \text{ف } n = 1 \text{ ص } 1 + \text{ف } 2 + \dots + \text{ف } n$$

$$= \left( \prod_{i=1}^n \text{ص } i \right) + \left( \prod_{i=2}^n \text{ف } i \right) + \dots + \left( \prod_{i=n}^n \text{ف } i \right) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)$$

(ملاحظة: نعرف الضرب الحالي  $\prod_{i=1}^n i$  أي باعتباره مساوياً للواحد) وينبغي مقارنة المعادلة (٦٧-١)

بالمعادلة (٦٤-١) في البند (٣-١) لأنها المقابل المتكامل لها.

المثال (١):

$$\text{ص } 1 + \text{ص } 2 + \dots + \text{ف } n = 1 \text{ ص } 1 + \text{ف } 2 + \dots + \text{ف } n = 1 \text{ ص } 1 + \text{ف } 2 + \dots + \text{ف } n = 1 \text{ ص } 1 + \text{ف } 2 + \dots + \text{ف } n$$

المثال (٢):

مزرعة أميا كانت سعتها الابتدائية ١٠٠٠، وقد لوحظ أن واحدة من كل عشر أميات، في المتوسط، تنتج واحدة أخرى في كل ساعة، الانقسام الخلوي،





فكم اميبا بالتقريب سيكون في المزرعة بعد ٢٠ ساعة؟

$$\text{ليكن ص } ٥ = \frac{1}{10} \text{ ص } ٥, \dots (٦٨-١)$$

وهذا يعني أن ص  $١+٥ = (١, ١)$  ص ن. والحل العام تعطيه المعادلة  $(١-٦٢)$ ، هو:

$$\text{ص } ١+٥ = (١, ١) \text{ ص } ١٠٠٠ = ٠ \text{ ص } ١٠٠٠.$$

$$\text{فيكون ص } ٢٠ = (١, ١) \times ١٠٠٠ \approx ٦٧٢٧.$$

المثال (٣):

في المثال السابق، افرض ان ٣٠ اميبا أخرى تتسرب الى المزرعة في كل ساعة من وعاء مجاور لم يحكم اغلاقه، فكم يكون عدد الاميبا بعد ٢٠ ساعة؟

تصبح المعادلة

$$\text{ص } ١٠٠ - \text{ص } ١٠ = \frac{1}{10} \text{ ص } ٣٠ + ٥, \text{ أي أن ص } ١٠ = (١, ١) \text{ ص } ٣٠ + ٥$$

$$\text{يكون حل المعادلة ص } ١+٥ = (١, ١) \text{ ص } ١٠٠٠ + \sum_{k=0}^{20} (١, ١) \text{ ص } ١٠$$

(٣٠)

ولأن مجموع المتوالية الهندسية  $١ + ١ + ١ + \dots + ١ = (١-١٠)$

/  $(١-١٠)$ ، ولنا يكتب هذا الحل بالصيغة

$$\text{ص } ١٠٠٠ = (١, ١) \text{ ص } ٣٠ + \left( \frac{١-١٠}{١-١٠} \right) (١, ١) \text{ ص } ١٠ \approx ٨٤٤٥.$$



وبالإمكان حل بعض معادلات الفروق غير الخطية التي تماثل المعادلات التي وردت في البند (١-٤) وسندرس هنا اثنين منها:

$$\text{فالمعادلة ص } ١ + ١ = ١ + \text{ص د} / (١ - \text{ف د ص د}) \dots\dots\dots (١-٦٩)$$

يمكن ان تكتب بالشكل

$$\text{ص د} = ١ + ١ = ١ + \text{ص د} + \text{ف د ص د} + ١ + \text{ص د} \dots\dots\dots (١-٧٠)$$

وهذه تناظر معادلة برنولي (١-٣٦).

فكلما صنفنا هناك نبدأ بتجربة التعويض

$$\text{ع د} = \frac{1}{\text{ص د}} \dots\dots\dots (١-٧١)$$

فنبعد قسمة طرفي (١-٧٠) على ص د ص د + ١، فينتج:

$$\text{ع د} = ١ + \text{ع د} + ١ + \text{ف د} \dots\dots\dots (١-٧٢)$$

$$\text{أي أن ع د} = \frac{\text{ع د} - \text{ف د}}{١}$$

وباستعمال طرفي هذا البند نجد ان:

$$\frac{\text{ف د}}{\text{١ د}} \left( \prod_{\text{د=١}}^{\text{ن}} \text{١ د} \right) \sum_{\text{د=١}}^{\text{ن}} \text{ع د} \left( \prod_{\text{د=١}}^{\text{ن}} \text{١ د} \right) = \text{ع د}$$

ونعوض (١-٧١) في (١-٧٤) فينتج الحل:

$$\text{ص د} = \frac{1}{\text{ع د}} \left( \prod_{\text{د=١}}^{\text{ن}} \text{١ د} \right) \sum_{\text{د=١}}^{\text{ن}} \text{١ د} \left( \prod_{\text{د=١}}^{\text{ن}} \text{١ د} \right) = \text{ف د}$$

وبالمثل لدينا معادلة ركاتي (في الفروق) وهي لا خطية.

$$ص_ن ص_{ن+1} + 1_ن ص_أ + 1_ن ص_ب + 1_ن ص_ج = 1_ن ص_د ..... (1-75).$$

ولإيجاد التشابه بين هذه ومعادلة ركاتي التفاضلية (1-39)، نكتب

بالشكل (1-75)

$$(ص_ن - 1_ن ص_أ) + (ص_ن - 1_ن ص_ب) + (ص_ن - 1_ن ص_ج) + (ص_ن - 1_ن ص_د) = 0$$

ولكي نحصل على معادلة خطية، نعوض  $ص_ن = \frac{ص_أ}{1_ن}$  ب ن، في

المعادلة (1-75)، فبعد الاختصار تصبح (1-75) بالشكل

$$(1_ن - 1_ن ص_أ) - (1_ن - 1_ن ص_ب) - (1_ن - 1_ن ص_ج) = 1_ن ص_د ..... (1-76).$$

وهذه المعادلة خطية من الرتبة الثانية. وفي الفصل 4 سندرس طرق حل

هذه المعادلات عندما تكون  $1_ن$  ب ن،  $ص_ن$  ح ن ثابت.

التمارين (1-6)

في التمارين من 1 إلى 9 أوجد الحل العام لكل معادلة فرق وحيث تعطى

شرطا ابتدائيا أوجد حلا خاصا يحققه:

$$1. ص_ن - 1_ن ص_أ = 2_ن$$

$$2. ص_ن \frac{1_ن + 1_ن}{3_ن + 1_ن} = 1_ن$$

$$3. ص_ن - 1_ن ص_أ = 3_ن$$

$$4. 2_ن ص_أ = 1_ن ص_ب = 1_ن$$

$$٥. (ن + ١) ص = ١٠٥ ص = (ن + ١) ص = ٥ ص. ١ =$$

$$٦. ص = ١٠٥ ص = ن ص =$$

$$٧. ص = ١٠٥ ص - هـ - ٢٠ ص = ٢ ص = ٢ ص = ٢ ص =$$

$$٨. ص = ١٠٥ ص - ن ص = ٥ ص = ١ ص = ٥ ص =$$

$$٩. ص = ١٠٥ ص - هـ - ٢٠ ص = ٢٠ ص = ٢٠ ص =$$

١٠. يتلشى الراديوم بمعدل ١ في المئة كل ٢٥ سنة فإذا أخذنا عينة من الراديوم مقدارها غ غرامات وكان غ هو ما يبقى بعد ٢٥ ن سنوات فأوجد معادلة غ و أوجد منها كم يبقى من العينة بعد مئة سنة؟

١١. أجريت لعبة بقطعة نقد كتب على أحد وجهيها (١) وعلى الوجه الاثني (٢) فكان اللاعب يقذف القطعة مرات متتالية وسجل له مجموع نتائجه من آحاده اثنتين فليكن ح هو احتمال ان يحصل اللاعب ذات مرة على المجموع ن أثبت أن ح = ١ - ١/٢ ح = ١٠ ثم على اعتبار أن ح = ١ استتج قانون ح

١٢. لوضع نموذج رياضي لعدد السكان في مجتمع ما افترض أن ح، احتمال ان ينجب الزوجان ن من المواليد، هو حسب المعادلة ح = ٧ وح ١٠٠ أوجد ح بدلالة ح. و أوجد قيمة ح. من العلاقة:

$$ح. + ح + ح + ح + ... = ١$$

١٣. في نموذج آخر للتمرين ١٢ كان ح (١/ن) ح ١٠٠ أوجد هنا ح بدلالة ح. واثبت أن ح = ١/١ هـ

١٤. ليكن  $S$  عدد تباديل  $n$  أشياء بأخذها كل  $k$  معاً. فمع كل تبديل من تباديل  $k$  نحصل على  $n - k$  تباديل من  $k + 1$  أشياء، وذلك بأخذ واحد من الأشياء الباقية، وعددها  $n - k$ ، ووضعها جانباً، فيكون  $S_{k+1} = (n - k) S_k$ . أثبت أن عدد تباديل  $n$  أشياء مأخوذة كل  $k$  معاً هو  $n! / (n - k)!$ .

١٥. في التمرين ١٤، ليكن  $S_n$  هو عدد توافيق  $n$  أشياء وحيث لديهم، الترتيب. فكل تبديل يشمل  $k + 1$  أشياء (بترتيباتها المتلفة) يظهر  $k + 1$  مرات وعلى هذا يكون

$$S_{k+1} = (n - k) S_k$$

$$S_n = \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}$$

ويسمى الطرف الأيسر بالمعامل الحداني **Binomial Coefficient**

١٦. حول المعادلة  $S_n = (1 + \dots + 1) S_{n-1}$  الى معادلة خطية من الرتبة الثانية، وذلك بتعويض مناسب.

١٧. بتعويض مناسب حول كل واحدة من معادلتى ركائتي التاليتين الى معادلة خطية من الرتبة الثانية

$$(1) S_{n+1} = S_n + 2 S_{n-1} + 3 S_{n-2} + \dots + n S_{n-n}$$

$$(2) S_{n+1} = 3 S_n - 3 S_{n-1} + S_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} S_1 + (-1)^n$$

١٨. حل المعادلة  $S_{n+1} = 2 S_n - 1$  وذلك بتعويض  $S_n = T_n$  جتا  $S_n$

١٩. معادلة كليرون في الفروق تتخذ الشكل  $ص_0 = ن (ص_{١+٥} - ص_٥) +$

ف  $(ص_{١+٥} - ص_٥)$  لاحظ أن الفرق الأول  $ص_{١+٥} - ص_٥$  (ويعبر عنه بالرموز  $\Delta ص_٥$ ) يقوم بدور المشتقة في المعادلات التفاضلية ففي المعادلة  $ص_٥ = ن \Delta ص_٥$  ( $\Delta ص_٥$ )<sup>٢</sup> خذ أولا الفرق الأول لكل من الطرفين ثم عوض  $\Delta ص_٥ = ص_٥ - ص_{٥-١}$  ثم بين:

(أ) ان المعادلة الناتجة يمكن أن تكتب

$$(ص_٥ - ١ + ص_٥) (ص_{١+٥} + ص_٥ + ن + ١)$$

(ب) أن الشرط

$ص_٥ + ١ - ص_٥ = ٠$  يعطي الحل العام  $ص_٥ = ن ح + ح$ <sup>٢</sup>، حيث  $ح$  اعتباطي

(ج) أن الشرط  $ص_{١+٥} + ١ - ص_٥ - ن + ١ = ٠$  يتضمن أن

$ص_{١+٥} - ص_٥ = ١$  وهكذا نحصل على الحل المنفرد

$$ص_٥ = \left[ \frac{١}{٢} \left( \frac{ن}{٢} \right) - \left[ \frac{١ - (١ - ١)}{٤} + \sqrt{\frac{١ - (١ - ١)}{٤}} \right] \right]$$

## (٧-١) تطبيقات على معادلات الفروق

ذات الرتبة الأولى. طريقة نيوتن

من المسائل المهمة في الرياضيات إيجاد جذور أي معادلة معطاه، مثل:

ق (س) = ٠ ..... (٧٧-١)

فباستعمال نظرية تايلور، مركزه على قيمة  $s_0$ ، نعبر عن هذا الاقتران بالصيغة:

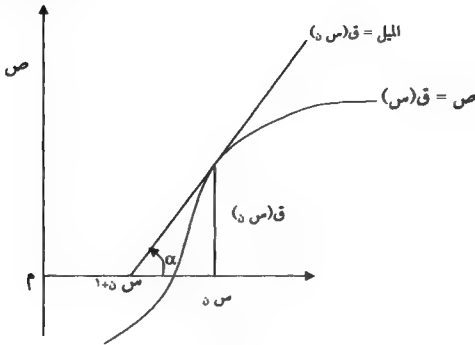
$$0 = q(s) = q(s_0) + q'(s_0)(s - s_0) + \frac{q''(s_0)}{2!}(s - s_0)^2 + \dots + \frac{q^{(n)}(s_0)}{n!}(s - s_0)^n + \dots$$

فإذا استبقينا الحدين الأولين في الطرف الأيسر وحذفنا الحدود الأخرى ثم حللنا المعادلة لاجتياز قيمة  $s$  ينتج:

$$s = s_0 - \frac{q(s_0)}{q'(s_0)}$$

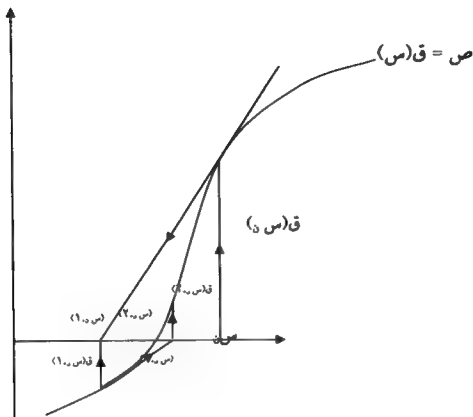
وتسمى هذه المعادلة صيغة نيوتن لحل المعادلات والقيمة  $s_{n+1}$  هي تقريب لجذر من جذور المعادلة (٧٧-١). وبالطبع ما دمنا قد اسقطنا كل الحدود عدا اثنين من متتالية تايلور للحصول على هذه القيمة فمن غير المحتمل أن تكون  $s_{n+1}$  جذراً للمعادلة (٧٧-١) ولكن إذا كان  $s_n$  قريباً من جذر ما،  $s$ ، تكون الكمية  $s - s_n$  قريبة من الصفر وهكذا يمكن إهمال القوى العليا للمقدار  $s - s_n$  في متتالية تايلور، فإذا كتبنا (٧٩-١) على النحو:

$$\frac{q(s_n)}{s_n - s_{n+1}} = q'(s_n)$$



شكل (٤-١)

لحصول على تفسير تخطيطي للعملية (انظر الشكل ٤-١)، فالمشتقة التفاضلية  $Q(S_D)$  هي ميل المماس المنحني  $S = Q(S)$  عند  $S = S_D$ ، وهذا الميل هو  $\alpha$  والخط المماس يقطع محور  $S$  عند  $S_D + ١$ ، العملية لإيجاد الجذر تشتمل على إيجاد جذر ابتدائي  $S$ . بالحد  $S$  ثم تطبيق (١-٧٩) مرة بعد مرة لإيجاد المتتاليات  $S_D$ ، أولاً بأن تقارب هذه المتتالية إلى للمعادلة (١-٧٧)، (انظر الشكل ١-٥) والشروط التي تضمن أن تسير العلمية سيراً صحيحاً تبينها النظرية التالية:



الشكل (١-٥)

النظرية (١-١) اذا كان ق(س) معرّفاً في الفترة  $1 \leq s \leq b$ ، ومتصلاً وقابلاً للاشتقاق مرتين ويفضي الى مشتقتين متصلتين، ويحقق ما يلي:

- i) ق(١) - ق(ب) مختلفا الاشارة ،
- ii) ق(س) = ٠ لكل س في  $1 \leq s \leq b$  ،
- iii) ق(س) لا يغير اشارته في الفترة  $1 \leq s \leq b$  ،
- iv) وإذا كان ق(١)  $\geq$  ق(ب) يكون | ق(١) / ق(ب) |  $\geq$  ب - ١
- وإذا كان ق(١)  $\geq$  ق(ب) يكون | ق(ب) / ق(١) |  $\geq$  ب - ١



يحتاج الامر الى خطوات أكثر حتى نحصل على هذا القدر من الدقة فحسن اختيار القيمة الابتدائية يقلل من خطوات الحل.

ولكي نتبين أن الطريقة تنجح دائماً،

نفرض  $1 = 1$ ،  $b = 1 + c$  مختبر شروط النظرية (1-1) نلاحظ أن  $q$   
 $(1) = 1 - c > 0$ ،  $q(1+c) = 1 + c + c^2 > 0$ ،  $q(1+c) = 1 + c + c^2 > 0$ ،  $q(1+c) = 1 + c + c^2 > 0$   
 لكل  $1 < 1$ ،  $q(1+c) = 1 + c + c^2 > 0$ ، لذلك نتحقق الشروط (1)، (11)، (111).

$$\text{ولأن } q(1) = 1 + c + c^2 > 0 \text{، } q(1+c) = 1 + c + c^2 > 0$$

$$1 - c = \frac{1-c}{1} = \frac{1-c}{1} = \frac{1-c}{1}$$

فإن الشرط (iv) يتحقق ايضاً أي أن طريقة نيوتن تقضي الى حل وحيد  
 في الفترة  $1 \leq c \leq 1+c$  وليس ضرورياً تحقيق شروط النظرية (1-1) قبل  
 تطبيق طريقة نيوتن، الا ان عدم التحقق من ذلك قد ينجم عنه أحد الأمرين  
 التاليين:

1. تباعد المتتالية  $\{s_n\}$  دون ان تقضي الى حل.

2. فوات فرصة الحصول على جذور اخرى ضمن الفترة  $\{1, 1+c\}$ .

المثال (2):

لايجاد الجذر الرأى للعدد  $1 < 1$ ، نحل المعادلة:

$$q(1+c) = 1 + c + c^2 > 0 \text{، } q(1+c) = 1 + c + c^2 > 0 \text{، } q(1+c) = 1 + c + c^2 > 0$$



المثال (٤):

إذا شئنا ان نجد مقلوب أي عدد، بلا قسمة نستعمل الخطة رزمية التالية وهي تستعمل في بعض الحاسبات: نتخذ ق (س) = ١ / س - ع، فيكون ق / (س) = ١ - ١ / س، والقاعدة (١ - ٨٩) تعطي

$$س = ١٠٠ = ١٠٠ - \frac{س - ١٠٠}{١٠٠} = \frac{س - ١٠٠}{١٠٠} - ١٠٠$$

وهذا يتقارب الى ١ / ع لكل س. حيث. > س. > ٢ / ع. فلحساب ١ / حيث ٥٩٢٦ / ٤، ٣، ونجعل س. = ٥، ٠ فنجد ما يلي:

$$س. = ٥، ٠، ٣١٤٧ = ٣$$

$$س. = ١، ٠، ٢١٤٦، ٠ = س. = ٣١٨٢٧، ٠$$

$$س. = ٢، ٠، ٢٨٤٥، ٠ = س. = ٣١٨٣٠٩٨٩، ٠$$

والأخير صحيح لثمانى منازل عشرية.

لاحظ ان التقارب سريع في المثالين (١) و (٤) ان سرعة التقارب في قاعدة نيوتن تتناسب مع العبارة التربيعية (س - س<sup>٢</sup>). وهي عامل في كل الحدود التي حذفناها من (١ - ٧٨).

لهذا تسمى احيانا بالتقارب التربيعي Quadratic Convergence.

التمارين (١ - ٧)

١. باستعمال قاعدة نيوتن، ضع خوارزمية لحساب الجذر التكعيبي لاي عدد موجب ثم احسب ٦٧<sup>٢</sup> لاربعة منازل.

٢. احسب قيمة  $\frac{1}{4}$  لثمانى منازل عشرية، بدون قسمة. ابدأ خطوات نيوتن

بالعدد ١٥، ٠.

٣. بين بالرسم ان هنالك حلا واحدا للمعادلة  $x^2 = 5$  ثم أوجد هذا الحل لاربع منازل عشرية باستعمال قاعدة نيوتن.

٤. ضع خوارزمية تعطي، بعد اختيار مناسب لقيمة  $x_0$ ، أصغر جذر موجب للمعادلة

$x^2 = 5$  جتا  $x = 5$  ثم احسب هذا الجذر لاربع منازل عشرية. {ارشاد: ضع رسما يبين ان لكل من  $x^2 = 5$  جتا  $x$ ،  $x$  لكى ترى ما الذى يجري}.

٥. أوجد لاربع منازل عشرية أصغر جذر موجب للمعادلة  $\frac{1}{x} = 5$  جتا  $x = 5$ .

٦. ضع باللغة الاساسية BASIC، أو بلغة فورتران، برنامج كمبيوتر لإجراء العمليات الحسابية اللازمة في التمارين ٣، ٤، ٥.

٧. يمكن اعتبار المشتقة  $f'(x)$  مساوية بالتقريب للمقدار

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

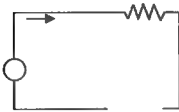
وهو خارج فرق على فرق، وواضح ان هذا الخارج يقترب من قيمة المشتقة كلما اقترب الفرقان من الصفر، عوض بهذه الصيغة عن المشتقة في قاعدة نيوتن، واستنتج من ذلك معادلة فروق من الدرجة الثانية تحدد خطوات متتابعة.

(ملاحظة: يغطي هذا الطريقة لحل المعادلات العددية تسمى *requa* \* *falsi* والطريقة تفيد اذا كان ايجاد المشتقة غير مرغوب فيه).

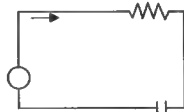
٨. باستعمال طريقة التمرين ٧، ضع خوارزمية لحساب الجذور التربيعية،  
واخرى لحساب الجذور التكعيبية، ثم احسب  $157$ ،  $77^2$  بهما، وقارن  
نتائجك بما يتج بطريقة نيوتن (لاحظ ان هذه الطريقة تقتضي اختيار  
قيمتين ابتدائيتين).

### (٨ - ١) الدوائر الكهربائية البسيطة.

في هذا البند ندرس دوائر كهربائية بسيطة تحتوي على أجهزة مقاومة  
وحت أو مواصلة، تتصل على التوالي بمصدر دافعة كهربائية (ق د ك). وهي  
كالهيئة بالشكل (١-٦ ، ب). ويسهل فهم عملها دون معرفة متخصصة  
بالكهرباء.



يوجد شكل (١)



(ب)

الشكل (١-٦)

وهذه الطريقة استعملها العرب بكثرة وسموها حساب الخطأين، وعنهم  
أخذها البيزنطيون، وقد كانت الطريقة تستعمل على نحو بدائي في مصر  
الفرعونية.

١. ق: قوة الدافعة الكهربائية (ق د ك)، وتقاس بالفولت. وهي عادة بطارية  
١ ومولد كهربائي يدفع بشحنة ش (كولوم) فينتلق تيار ت (أمبير).

ويعرف بأنه سرعة تدفق الشحنة. فنكتب

$$I = \frac{dq}{dt} \dots\dots\dots (1-83)$$

٢. جهاز مقاومة (resistor) مقاومته و(أوم) وهو من مركبات الدائرة ويقاوم التيار ببعثرة طاقته على شكل حرارة، فيحدث انخفاضاً في الفولتية وهو حسب قانون أوم

$$V = IR \dots\dots\dots (1-84)$$

٣. جهاز حث (inductor) مقدار حثه (inductance) ح (هنري) وهو يقاوم أي تغير في التيار بخفض الفولتية بمقدار.

$$V = L \frac{di}{dt} \dots\dots\dots (1-85)$$

٤. مواسع (capacitor) مواسعته (capacitance) من (فاراد) تحتزن الشحنة وبذا تقاوم تدفق شحنات أخرى فتحدث انخفاضاً بالفولتية مقداره.

$$I = C \frac{dV}{dt} \dots\dots\dots (1-86)$$

والكميات و، ح، من هي عادة ثابتة تحددها اجهزة الدارة الكهربائية. وأما ق فقد تكون ثابتة أو متغيرة تبع الزمن. والمبدأ الاساسي الذي يسري على هذه الدوائر هو قانون الفولتية المنسوب للعالم كرتشوف، وهو:

المجموع الجبري لانخفاضات الفولتية حول الدائرة المغلقة: صفر

ففي الدارة المبينة بالشكل ٦-١ (٢) تحدث المقاومة والحث حفظاً في



الفولتية مقداره  $Q$ ،  $C$  على التوالي. اما قادك فهي مصدر بمد الدائرة بالقوة  $Q$  (أي انه يخفض الفولتية بمقدار  $-Q$ ).

$$0 = Q - C + Q = 0$$

فنبقل  $Q$  الى الطرف الثاني للمعادلة واستعمال المعادلتين (٨٤-١) و (٨٥-١) للتعويض عن  $Q$ ،  $C$  ينتج:

$$C = \frac{d}{d} + T = 0 \quad (٨٧-١)$$

وهذه المعادلة تفاضلية خطية. فنقسم على  $C$  ونستعمل المعادلة (٨٤-١) فينتج:

$$T = -C \left[ \frac{1}{C} (Q) - \frac{C}{d} \right] \quad (٨٨-١)$$

فاذا كانت  $Q$  ثابتة، تتحول المعادلة الى الشكل:

$$T = -C \frac{Q}{d} + C \frac{C}{d}$$

فاذا وضعنا  $N = 0$  ينتج:

$$Q = \frac{C}{d} + \frac{C}{d} (N) - \frac{C}{d} \quad (٨٩-١)$$

وتزايد  $Q$  تقترب قيمته الحد الاخير في هذه المعادلة من الصفر، لذلك يسمى بالجزء الزائل من التيار فيبقى لدينا  $Q$  وهو الجزء ذو الحالة الثابتة من التيار.



المثال (١):

وصلنا حثا مقداره ٢ هنري (هن) ومقاومة مقدارها ١٠ أوم (م) مع ق  
دك مقدارها ١٠٠ فولت (ف). فإذا علم ان التيار كان صفرا عندما كان  $n = 0$   
فكم كان التيار بعد ١, ٠ ثانية؟

نطبق المعادلة (١-٨٩) متخذين  $q = 100$ , و  $i = 0$ ,  $t = 0$

$n = 1$  و  $i = 0$  فينتج

ث (١, ٠)  $= (0, 1) 10 = (1 - 10^{-6}) 3, 39$  أمبير.

المثال (٢)

في المثال السابق اذا كانت  $q = 100$  جا ٦٠ ن فولت واستعملنا المعادلة  
(١-٨٨) والقانون (٥٠) في الملحق ١ ينتج

ت (ن)  $= 10^{-6} [50] z (جا ٦٠ ن)$ .  $10^{-6} د ن + ح$

$$= 10^{-6} \left[ 50 + \frac{(60 - 60 \cos 60^\circ)}{3620} \right] ح + 10^{-6} د ن$$

$$= 10^{-6} \left[ 50 + \frac{24 - 60 \cos 60^\circ}{29} \right] ح + 10^{-6} د ن$$

فإذا وضعنا  $n = 0$  نجد ان  $ح = 29/24$  فيكون:

$$ت (١, ٠) = (0, 1) 10 = 10^{-6} \left[ 50 + \frac{24 - 60 \cos 60^\circ}{29} \right] ح + 10^{-6} د ن = 3, 31 - ٠$$

وفي الدائرة في الشكل ٦-١ (ب) يكون  $ق د + ق س - ق = 0$ .

أي ان

$$و \frac{دش}{د ن} + \frac{ش}{ق} = ق, \text{ لأن } ن = دس / دن ..... (٩٠-١)$$

وهذه المعادلة خطية فيكون:

$$ش (ن) = هـ - دس / و [ \frac{1}{و} ] ق (هـ - دس / د ن + ح) ..... (٩١-١)$$

فاذا كانت ق ثابتة ينتج: ش (ن) = ق س + [ش (٠) - ق س] هـ - دس / و .  
(٩٢-١).

المثال (٣) اذا وصلنا مقاومة مقدارها ٢٠٠٠ أوم ومواسعة مقدارها ٥ × ١٠<sup>-٦</sup> فاراد (ف)، على التوالي بقوة ١٠٠ فولت. فكم يكون التيار بعد ١, ٠ ثانية علما بأن ت (٠) = ٠, ٠١ أمبير؟

في المعادلة (٩٢-١) نضع و = ٢٠٠٠، س = ٥ × ١٠<sup>-٦</sup>، ق = ١٠٠ فتكون الشحنة في اللحظة ن، بدلالة الشحنة عند ن = ٠، كما يلي:

$$ش (ن) = (ن) = ٥ \times ١٠^{-٦} + \{ ش (٠) - ٥ \times ١٠^{-٦} \} هـ - دس / و ..... (٩٣-١)$$

ولان ت = د ش / دن، نجد ان

$$ت (ن) = (ن) = (١٠٠ -) \{ ش (٠) - ٥ \times ١٠^{-٦} \} هـ - دس / و$$

نجعل ن = ٠، فينتج ش (٠) = ٤ × ١٠<sup>-٦</sup> كولوم، ويكون:

$$ت (١, ٠) = (٠, ١) هـ - دس / و = ١٠٠ أمبير.$$

## التمرين (٨-١)

١. حل مسألة المثال (٣) على اعتبار ان  $Q$  د ك هي  $100$  جا  $120\pi$  ن فولت.

٢. وصلنا حثا مقداره هنري واحد ومقاومة مقدارها  $2$  أوم على التوالي ببطارية قوتها  $6$  هـ  $10^{-3}$  فولت.

وفي البدء لم يكن يجري أي تيار. فمتى يصبح التيار  $0.5$  أمبير.

٣. وصلنا مقاومة متغيرة مقدارها  $1/(1+\sin)$  أوم مع مواسعة مقدارها  $5 \times 10^{-7}$  فاراد على التوالي بقوة  $Q$  د ك تساوي  $100$  فولت. فإذا كان  $\sin(0) = 0$  فكم تكون الشحنة على المواسعة بعد دقيقة؟

٤. في دائرة المقاومة والمواسعة (في الشكل ٦-١ ب) حيث الفولتية  $Q$  ثابتة، كم يستغرق التيار قبل أن ينخفض الى نصف قيمته الأصلية؟

٥. إذا كانت الفولتية في دائرة مقاومة ومواسعة هي  $Q \sin \omega t$  =  $Q \sin \omega t$  هي فترة الدائرة وكانت الشحنة الابتدائية صفراً، فأوجد الشحنة والتيار بدلالة  $\omega$ ،  $\sin$ ،  $\omega$ ،  $\sin$ .

٦. بين أن التيار في التمرين ٥ يتكون من جزأين، واحد ثابت الحالة له فترة مقدارها  $2\pi/\omega$ ، وواحد زائل يقارب الصفر بمرور الزمن.

٧. في التمرين ٦، بين أنه إذا كانت وصغيرة فإن الحد الزائل قد يكون كبيراً رغم ان قيم  $\sin$  صغيرة (لهذا قد تحترق الفاصلة الكهربائية إذا نقر احد مفاتيح الدورة).

٨. أوجد التيار الثابت الحالة إذا علم أن مقاومة ٢٠٠٠ أوم وسعة ٣ x ١-٦ فاراد وقد وصلنا على التوالي بقوة دافعة تبادلية مقدارها ١٢٠ جتا ٢ ن فولت.

### (٩-١) منحنيات المطاردة\*

نشأ معادلات تفاضلية مجمعة عند دراسة المسارات التي تتبعها القناصة في مطاردة فريستها وفي الصفحات التالية أقدم المسائل من هذا القبيل.  
المثال (١):

ك حجر ثقيل موضوع في نقطة (٠، ٢) (انظر الشكل ٧-١)، ل رجل كان واقفاً عند نقطة الأصل م فإذا أمسك الرجل بطرف سلسلة طولها أ ربط طرفها الآخر بالحجر ك، ثم مشى على محور ص، فما المسار الذي يسلكه الحجر ك. وهو يزحف وراء الرجل؟

تسمى هذا المسار بالمجرورة tractrix اذكر الخط ك ل يمسك هذا المسار

فميله  $\frac{د ص}{د م}$  يعطي بالمعادلة

$$\frac{د ص}{د م} = \frac{\sqrt{٢ م - م^٢}}{م} \dots\dots\dots (٩٤-١)$$

وذلك لأن ك ل = ٢.

نكامل طرفي - (٩٤-١) باستعمال القانون ١٦ في الملحق ١، فيكون

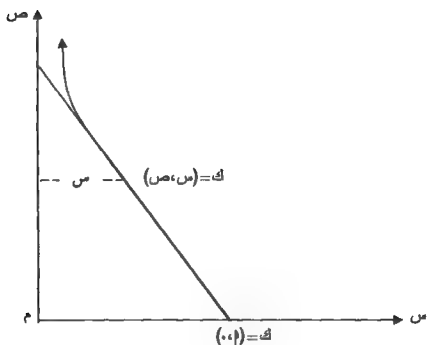
$$ص = - \left[ \frac{\sqrt{٢ م - م^٢}}{م} د م + ج \right]$$



$$= \frac{1}{m} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 = m v^2 \quad (1-90)$$

ولأن  $v = 0$  عند  $m = 0$ ، يتبع أن  $v = 0$ ، ولذا يكون مسار الجبرورة

$$v = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 \right) = v^2$$



الشكل (٧-١)

المثال (٢):

ك صقر عند النقطة  $(0, m)$  شاهد الحمامة ل عند نقطة الأصل تطير على طول محور  $v$  بسرعة  $c$ ، فطار باتجاه الحمامة بسرعة  $c$  فما مسار الصقر؟



لنقل أن  $n =$  عندما طار الصقر باتجاه الحمامة، فبعد  $n$  ثوان تكون الحمامة في النقطة  $L$ .

(ع  $n$ ) ويكون الصقر في النقطة  $K = (س، ص)$  والخط  $KL$  مماس للمسار المطلوب (انظر الشكل (٧-١) وميله

$$ص = \frac{ص - ع}{س} \text{ فيكون}$$

$$ص - ص = ع = ع \cdot ن.$$

وكذلك فإن طول المسافة التي قطعها الصقر هي، باستعمال قاعدة طول القوس،  $Q$

$$ع \cdot ن = [د ق] = [س + \sqrt{ص^2 + 1}] د س \dots (٩٧-١)$$

تحل المعادلتين (٩٦-١)، (٩٧-١) لإيجاد  $n$  في كل منهما، ثم نعاذل الناتجتين فيكون

$$ص = \frac{ص - ع}{س} = \frac{1}{ع} [س + \sqrt{ص^2 + 1}] د س \dots (٩٨-١)$$

نفاضل الطرفين في (٩٨-١) بالنسبة إلى  $س$ ، فينتج:

$$ص - ص = \frac{ع}{س} [س + \sqrt{ص^2 + 1}] \dots (٩٩-١)$$

نجعل  $ص = ف$  فتحول المعادلة (٩٩-١) إلى:

$$س = ف = \frac{ع}{ف} [ف + \sqrt{ف^2 + 1}]$$

فنفصل المتغيرين ونتاج:

$$\frac{\frac{د}{س}}{\frac{ع}{غ}} = \frac{د}{\sqrt{ف+1}}$$

وبمكاملة الطرفين، ينتج:

$$\frac{د}{س} = \left( \sqrt{ف+1} + \frac{ع}{غ} \right) \text{ لي س - ح} \dots\dots\dots (1-10)$$

ولأن  $ف = ص$ ، عند  $س = 1$  (ميل ك ل، عند  $ن = 0$ ) ينتج أن

$$\frac{د}{س} = \frac{ع}{غ} \text{ لي } 1 \text{ فرفع الطرفين ونتاج}$$

$$ف + \sqrt{ف+1} = \left( \frac{س}{1} \right)^{1/2}$$

وبعد المعالجة الجبرية ينتج:

$$\frac{د}{س} = \frac{1}{\sqrt{ف}} \left[ \left( \frac{س}{1} \right)^{1/2} - \left( \frac{س}{1} \right)^{1/2} \right] - \frac{1}{2} = \frac{د}{س}$$

فإذا فرضنا أن الصقر أسرع من الحمامة (أي  $ان غ < ع$ )، يمكن أن نكمل

(1-11) ونتاج:

$$\frac{د}{س} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\left( \frac{س}{1} \right)^{1/2}}{\frac{ع}{غ} - 1} - \frac{\left( \frac{س}{1} \right)^{1/2}}{\frac{ع}{غ} + 1} \right] + \frac{1}{2}$$

ولأن  $س = 1$  عند  $س = 1$ ، ينتج:

$$\frac{د}{س} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\frac{ع}{غ} - 1} - \frac{1}{\frac{ع}{غ} + 1} \right] - \frac{1}{2}$$

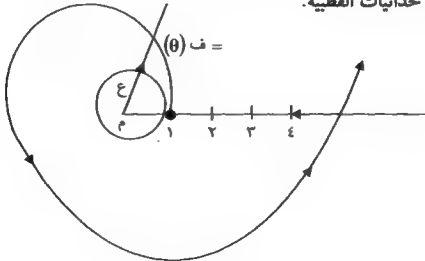
والصقر يدرك الحمامة عند  $س = 1$ ،  $ص = 1$  ع غ / (غ - ع) وفي

التمرينين ١، ٢ ندرس الحالة عندما تكون سرعة الصقر لا تزيد عن سرعة الحمامة (غ ≤ ع).

المثال (٣):

وقفت مدمرة في وسط ضباب كثيف، وانقشع لضباب للحظة، واكتشفت المدمرة غواصة معادية على بعد ٤ أميال عنها، فعلى فرض أن الغواصة غاصت ومضت بأقصى سرعتها في إتجاه مجهول، فبأي مسار تسير المدمرة لتضمن مرورها من فوق الغواصة، إذا كانت سرعتها ع ثلاثة أمثال سرعة الغواصة؟

نفرض ان المدمرة سارت ثلاثة أميال باتجاه الموضع الذي كانت الغواصة فيه، فعندها تكون الغواصة على محيط دائرة مركزها ذلك الموضع ونصف نظرها ميل واحد، (انظر الشكل (٨-١)) وذلك لأن سرعتها ثلث سرعة المدمرة ولأن موضع الغواصة يسهل تعيينه بالاحداثيات القطبية، فسنلجأ الى هذه الاحداثيات ونكتب  $r = c$  ونفرض أن هذا هو المسار الذي تسلكه المدمرة لتضمن مرورها من فوق الغواصة، مهما كان الاتجاه الذي تسير فيه الغواصة، فالمسافة التي تقطعها الغواصة حتى تصل الى نقطة الالتقاء هو  $r - 1$  في حين أن المسافة التي تقطعها المدمرة، هي ثلاثة أميال ذلك، هي قوس منحني، لنجد طول القوس في الاحداثيات القطبية.



الشكل (٨-١)؟

فيكون ؟

$$\int_0^1 \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = \int_0^1 \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = (1-r)^3$$

$$\int_0^1 \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = (1-r)^3 \dots\dots\dots (1.3)$$

نفاضل الطرفين بالنسبة الى C، ونحصل على المعادلة التفاضلية

$$\sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} = r^3$$

وهذه تختصر الى  $r^2 = (\frac{dr}{d\theta})^2$  فنأخذ الجذر التربيعي للطرفين، ونفصل

المتغيرين، فينتج

$$\frac{dr}{\sqrt{r}} = \frac{d\theta}{r}$$

ومن ذلك يتبع أن لي  $r = \theta / \sqrt{r} + C$  أي أن

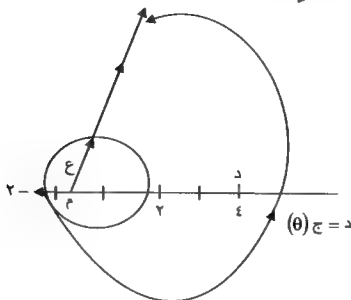
$$r = \theta / \sqrt{r} + C \dots\dots\dots (1.4)$$

ولأن  $r = 1$  عند  $C = 0$ ، يتبع أن  $C = 1$  فالمدار الذي تسلكه المدمرة هو

المدار اللولبي  $r = \theta / \sqrt{r} + 1$ ، وذلك بعد قطع 3 أميال نحو الموقع الأول للغواصة.

ويلاحظ أن هذا ليس هو المدار الوحيد المدمرة. فمثلاً قد نجعل المدمرة

تقطع 6 أميال في اتجاه الغواصة (انظر الشكل (1-9))



الشكل (٩-١)

فهنا تسلك المدمرة مساراً هو  $r = c$  ولأن الخاصية في هذه الحالة قد قطعت عن نقطة الأصل، تكون المسافة التي مستطعها حتى تصل الى نقطة الالتقاء هي  $r = c$ ، في حين تقطع المدمرة

$$(1, 0, \dots, 0) \dots \dots \dots \overline{\theta^T J + \tau (\theta^T / J)} \bigg|_{\tau=0}^{\theta} = (\tau^T J)^T$$

فالمعادلة (١٠٥-١) تنفي الى الحل العام (١٠٤-١)، ولكن هنا  $\gamma = 0$  عندما  $t = 0$  فيكون  $\gamma = 0$

فالمسار اللولبي الذي تسلكه المدمره هو:

$$\lambda/(x-0) \quad Y =$$

وبالطبع يستطيع قائد الغواصة ان يتحاشى اكتشاف امره بالتباطؤ ويسير في مسار منحني.

## التمرين (٩-١)

١. في مثال (٢) افرض ان  $ع = غ$  واثبت ان

$$ص = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{م}{1} \right) - \left[ 1 - \frac{م}{1} \right] \right] \frac{1}{2}$$

وهكذا فلن يلحق الصقر الحمامة. وباستعمال (١-٩٧)، (١-١٠١) يتبين انه عندما يكون الصقر في (س، ص) تكون المسافة بين الصقر والحمامة هي  $(ص^2 + 1/2 \cdot 12)$ .

وهكذا فلن يكون الصقر أقرب الى الحمامة من ١/٢

٢. اثبت ان  $ع < غ$  (في المثال (٢)) ثم اثبت ان:

$$ص = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - 3/4 \cdot (م/1)}{1 - (غ/ع)} + \frac{3/4 \cdot (1/م)}{غ/ع + 1} \right] \frac{1}{2}$$

وهكذا فالصقر لن يلحق بالحمامة. أوجد بدلالة م المسافة بين الصقر والحمامة.

٣. اذا كان محور ص والخط م = ب ضفتي نهر يجري بسرعة ع (باتجاه ص السالب)، ووقف رجل عند نقطة الأصل ووقف كلبه عند النقطة (ب، ٠) ثم نادى الرجل كلبه فخاض الكلب في النهر يسبح باتجاه صاحبه بسرعة ثابتة غ (< ع) فماذا يكون مسار الكلب؟

٤. أين يصل الكلب في التمرين ٣ الى البر اذا كان  $ع = غ$ ؟

٥. بين أن الكلب في التمرين ٣ لن يصل الى البر اذا كان  $ع < غ$ .

افرض أن الرجل اخذ يمشي باتجاه سير النهر في اللحظة التي نادى فيها كلبه، وبسرعة  $c$  فهل يستطيع الكلب الآن أن يصل إلى البر؟

٦. في المثال (٢) افرض ان المدمرة اتجهت نحو النقطة التي كانت فيها الغواصة، ثم دارت  $90^\circ$  إلى اليسار وقطعت ميلين قبل أن تبدأ سيرها اللولبي، فما معادلة المسار الذي يجب أن تسلكه الآن؟

٧. افرض ان المدمرة في المثال (٢) تسير بمثلي سرعة الغواصة وان الغواصة اكتشفت عندما كانت على بعد  $3$  أميال عن المدمرة. أوجد مساراً يضمن أن تمر المدمرة فوق الغواصة على فرض أنهما يسيران على نفس المبدأ المين في المثال المذكور.

٨. ثلاث زواحف على أركان مثلث متساوي الأضلاع خلفه  $P$ ، بدأت تتحرك بسرعة واحدة، كل نحو التي إلى يمينها، اجعل مركز المثلث عند نقطة الأصل واحد رؤوسه على محاور  $x$  الموجب. أوجد مسار الزاحفة التي بدأت من محور  $y$ .

٩. حل هذا التمرين اذا كانت الزواحف أربعاً على رؤوس مربع  $[0, 1] \times [0, 1]$  كم تقطع الزواحف قبل ان تلتقي؟

### (١٠-١) التحليل، الحجرات (Compartmentments)

كثيراً ما تكون العملية الفيزيائية او البيولوجية من التعقيد بحيث تقسم الى عدة مراحل متميزة وعندها يمكن أن توصف العملية كلها عن طريق وصف التداخل بين هذه المراحل. فكل مرحلة من هذه المراحل نسميها حجرة، ومحتويات كل حجرة تعتبر ممزجة تمام الامتزاج. فإذا انتقل شيء من حجرة الى

اخرى يستوعب فيها فوراً. وعلى هذا نسمي العملية كلها منظومة حجرات. فالمنظومة المفتوحة هي التي يمكن ان تعطي أو تأخذ عن طريق واحدة أو أكثر من الحجرات، فإن لم يتوافر ذلك تعد المنظومة مغلقة .

وفي هذا البند ندرس أبسط هذه المنظومات وهي منظومة الحجرة الواحدة. اما المنظومات الاكثر تعقيداً فنجد شيئاً عنها في الفصول القادمة.

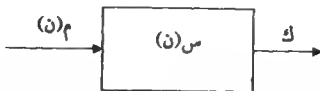
وبشكل (١-١٠) يمثل منظومة ذات حجرة واحدة تحتوي على كمية س (ن) من المادة. وهناك وارد يرد اليها بسرعة م (ن). اما ك فهو معامل تحويل كسري بين الجزء من المادة الذي يصدر عنها في وحدة الزمن. ومن الواضح ان السرعة التي بها تتغير الكمية س تعتمد على الفرق بين الوارد والصادر في أي لحظة ن وهذا يفضي الى معادلة التفاضلية.

$$\frac{ds}{dn} = s(n) - m(n) \dots\dots\dots (١-١٠٦)$$

وكما رأينا في البند (١-٣) فان حل هذه المعادلة هو

$$s(n) = s^0 \{ 1 - k(n) \} \dots\dots\dots (١-١٠٧)$$

وهذا النموذج البسيط ينطبق على كثير من المسأل كما سنرى.



الشكل (١-١٠)

المثال (١):

نصف عمر مادة السترنتيوم (Sr90) خمسة وعشرون سنة. فإذا وضعنا ١٠ غرامات من هذه المادة في وعاء مختوم، فكم غراماً يبقى منها بعد عشر سنوات؟

ليكن  $s$  (ن) عدد غرامات المادة في السنة  $n$ . فلان عدد الذرات كبير جداً فإن العدد الذي يتلاش في وحدة الزمن يتناسب مع العدد في ذلك الزمن. وثابت التناسب  $k$  هو معامل التحول الكسري.

ولأنه ليس هنالك وارد، تصبح المعادلة

$$\frac{ds}{dn} = -ks \quad (1-10)$$

وحل هذه المعادلة هو  $s(n) = s_0 e^{-kn}$ ، حيث  $s_0 = 10$  غرامات.

فلايجاد  $k$  نضع

$$n = 25$$

$$s = 5$$

ومن ذلك يتبع بعد أخذ اللوغرثمات أن  $k = \frac{\ln(2)}{25}$  ن فيكون

$$s(10) = 10 e^{-k(10)} = 10 e^{-\frac{\ln(2)}{25} \cdot 10} = 10 e^{-\frac{\ln(2)}{2.5}} \approx 7.578 \text{ غ.}$$

المثال (٢):

صهريج فيه ١٠٠ غالون من الماء اذيب فيها ٥٠ باوند من الملح. ويصب في الصهريج في كل دقيقة ٢ غالون من محلول يحتوي الغالون منه على باون

واحد من الملح، فيمتزج المحلول بماء الصهريج في الحال نظراً لتحريكها بسرعة كبيرة، ويخرج المزيج من الصهريج بسرعة ٢ غالون في الدقيقة. أوجد كمية الملح في الصهريج في أي لحظة ن.

لتكن س (ن) هي كمية الملح في الباون بعد ن دقائق. فلان كل غالون من المحلول يصب في الصهريج يحتوي على باوند واحد من الملح، يكون ع (ن) = ٢.

ومن ناحية أخرى: ك =  $\frac{٢}{١٠٠}$  س لان ٢ غالون من مئة تخرج كل دقيقة فتكون المعادلة (١٠٦ - ١) كما يلي:

$$\frac{دس}{دن} = ٢ - \frac{٢}{١٠٠} س$$

وحلها:

$$س (ن) = ٥٠/٥ - \{ [ ٥٠/ن - دن + ح ] \}$$

$$٥٠/٥ - ح + ١٠٠ =$$

$$فعند ن = ٥٠ يكون س (٥) = ١٠٠ + ح$$

فيكون.

$$س (ن) = ١٠٠ - ٥٠ - ٥٠/٥$$

لاحظ ان س تتزايد مع الزمن وتقارب نسبة الملح الى الماء في المحلول الذي يصيب في الصهريج.

والمعامل الكسري ك قد يكون متغيرا كما سنرى في المثال التالي.

المثال (٣):

في المثال (٢) افرض ان ٣ غالون من المحلول يحتوي كل منها على باوند واحد من الملح في الصهرج كل دقيقة وان كل عناصر المسألة الاخرى بقيت على حالها. فهنا  $m = (n)$ ، ولان كمية الملح في الصهرج تتزايد مع الوقت فالجزء الذي يحول هو  $k = \frac{2}{n+100}$ . بسط هذا الكسر هو عدد الغالونات التي تخرج. والمقام  $(n+100)$  هو عدد الغالونات في الصهرج في الزمن  $k$ . والمعادلة التي تصف هذه المنظومة هي:

$$\frac{d}{n} - 3 = \frac{2}{n+100} \dots\dots\dots (109-1)$$

وباستخدام المعادلة  $(107-1)$  نجد ان حل  $(109-1)$  هو:

$$m(n) = \text{ما} - \left[ \frac{2}{n+100} \right] \left[ 3 \right] + \left[ \frac{2}{n+100} \right] (n + c)$$

$$= (n+100) + c - (n+100) \cdot \frac{2}{n+100}. \text{ فنضع } n = 0, \text{ ونجد ان } c = 500 = (100)^2, \text{ فيكون:}$$

$$m(n) = (n+100) - \frac{2}{n+100} (100)^2$$

وبعد ١٠٠ دقيقة يكون  $m = 500 - \frac{2}{500} (100)^2 = 187,5$  باوند.

من الملح في الصهرج.

وقد يعتمد الوارد  $m(n)$  على الكمية الموجودة بالاضافة الى اعتماده على الزمن. ففي امثلة سابقة يعتمد الوارد على الكمية المتوافرة وأمثلة أخرى يعتمد معامل التحويل الكسري أيضاً على الكمية المتوافرة، ففيه  $k = c$

وفي العمليات البيولوجية تقابل منظومات فيها الوارد معاملات التحويل الكسرية دورية نظرا لنهاية نشاطها. فمثلا افراز الغدد النخامية الامامية لهرمون (ACTH) المنشط لقشرة الغدة.

النظرية يمضي في دورة مدتها اربع وعشرون ساعة فيها ح تحرف افرازات الادرينالين على نحو يجعل مستواها في بلازما الدم اعلى ما يمكن حوالي الساعة ٨ صباحا و اقل ما يمكن حوالي ٨ مساء.

المثال (٤):

في (١-١٠٦) ليكن  $K = (N) = P + B \text{ جا } W$  ن، حيث  $A < B$ . فهذا يفضي الى المعادلة

$$\frac{d}{N} = \frac{M}{(N) - (P + B \text{ جا } W \text{ ن}) \text{ من } (1-110)}$$

$$\text{فلان } [P + B \text{ جا } W \text{ ن}) \text{ د ن} = P - \frac{B}{W} \text{ جتا } W \text{ ن} + ج،$$

يمكن ان نضرب عامل التكامل  $[A + (W/B) - 1) \text{ جتا } W \text{ ن}]$  في طرفي (١-١١٠) فينتج:

$$= \left( \frac{d}{N} \right) \cdot \frac{1}{(A + (W/B) - 1) \text{ جتا } W \text{ ن}} \text{ من } (1)$$

$$= \frac{1}{(A + (W/B) - 1) \text{ جتا } W \text{ ن}} \{ P + B \text{ جا } W \text{ ن}) \text{ من } \}$$

$$= \frac{1}{(A + (W/B) - 1) \text{ جتا } W \text{ ن}} \cdot \frac{d}{N} \text{ من } (1-111)$$

فنكامل من طرفي (١-١١١) من ٠ الى ن فينتج:

هي  $\Delta_n + (W/b) \times (W \Delta_n)$  من  $(n)$   $\Delta_n = \Delta_n$  هي  $\Delta_n + (W/b) \times (W \Delta_n)$  دن  
أي أن

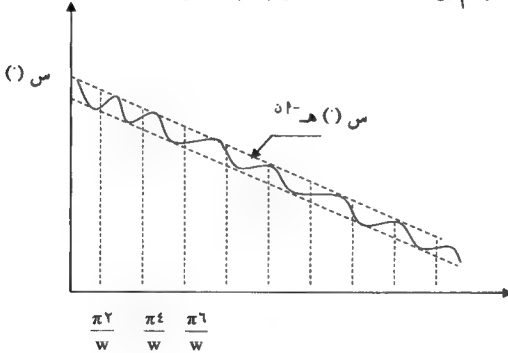
من  $(n) = \Delta_n + (W/b) \times (W \Delta_n)$  من  $(0)$

+  $\Delta_n$  من  $(n)$  هي  $\Delta_n + (W/b) \times (W \Delta_n)$  دن .....  $(112-1)$

ولأن  $1 - \Delta_n = W \Delta_n = 2$  جا  $2$   $(W/n)$  نكتب  $(12-1)$  بالصيغة:

من  $(n) = \Delta_n - \Delta_n + 2 \text{ جا } 2 (W/n)$

+  $\Delta_n$  من  $(n)$  هي  $\Delta_n + \Delta_n + 2 \text{ جا } 2 (W/n)$  دن .....  $(113-1)$



(الشكل ١-١)

فإذا كان م (ن) = ٠، فإن من (ن) يسلك المسلك المين بالشكل (١ - ١١)،  
حيث من (٠) هـ<sup>١٠</sup> هي حاصرة عليا والعامل ما [ ٢ - ٢ جا (٢ / ن) w / w ]  
يتراوح بين ساعة (-٢ ب / w) والواحد.

### التمارين (١ - ١٠)

١. للكربون (<sup>١٤</sup> C) ١٤ نصف عمر مقداره ٥٧٠٠ سنة وهو يتشتر في الجو بانتظام على شكل ثاني أكسيد الكربون فالنباتات الحية تمتص ثاني أكسيد الكربون وتحافظ على نسبة معينة من <sup>١٤</sup> C بالنسبة إلى العنصر الثابت <sup>١٢</sup> C فإذا ماتت يتحلل <sup>١٤</sup> C فتحلل هذه النسبة. قارن بين تركيز <sup>١٤</sup> C في قطعتين متماثلتين من الخشب، احدهما قطعت حديثاً والأخرى عمرها ٢٠٠٠ سنة.

٢. كثيراً ما يستعمل اليود المشع <sup>١٣١</sup> I في الطب للكشف ١٠ افترض ان جرعة معينة ج منه قد حقنت في مجرى الدم في اللحظة ن = ٠ وانها قد انتشرت بانتظام في الدم قبل أن تحدث أي خسارة فإذا كانت نسبة ما يفرز من اليود عن طريق الكلية د في المئة، وعن طريق الغد الدرقية ر في المئة، فأي نسبة من الجرعة الأصلية تبقى في الدم بعد يوم واحد.

٣. افترض أن شخصاً مصاباً جاء إلى المجتمع الذي عدد أفراد ع، كلهم معرضون للإصابة فإذا اعتبرنا أن سرعة العدوى تناسب مع حاصل ضرب عدد المصابين في عدد المعرضين للإصابة من الموجودين فكم يكون عدد المصابين في أي لحظة ن؟ لتكن نسبة الأصابة النوعية ك.

٤. صهريج كان في البدن يحتوي على التر من الماء النقي. ولكن أخذ ينصب

في محلول بسرعة ٤ لترات في الدقيقة، وكان المحلول يحتوي على ٢٠ غم من الملح في كل لتر، وكان المزيج يختلط فوراً بسبب الرج المتواصل فإذا كان الصهريج يتسرب منه المزيج بنفس السرعة التي يدخل بها المحلول، فمتى تصبح كمية الملح في الصهريج كيلو غراماً واحداً؟

٥. في التمرين ٤ كم يمضي من الزمن حتى ترتفع كمية في الصهريج من كيلو غراماً واحد الى كيلو غرام ونصف؟

٦. صهريج فيه ١٠٠ غالون من الماء الصافي، أخذ يجري محلول يحتوي على ٢ باوند من الملح في كل غالون، بسرعة ٤ غالون في الدقيقة، وكان المزيج يتنظم فوراً بالرج، فإذا كان المزيج ينصب من الصهريج بسرعة ٥ غالون في الدقيقة، فأوجد:

(أ) كمية الملح في الصهريج عندما يبلغ ما فيه ١٢٠ غالون.

(ب) مقدار تركيز الملح في الصهريج بعد ٢٠ دقيقة.

٧. صهريج فيه ٥٠٠ غالون من المحلول، أخذ ينصب فيه بسرعة ٥ غالون في الدقيقة آخر نسبة الملح فيه ٢ باوند لكل غالون فيتوزع الخليط بانتظام، وينسكب من الصهريج بسرعة ١٠ غالون في الدقيقة، فإذا كان الملح يصل إلى قيمته القصوى في الصهريج بعد ٢٠ دقيقة فكم كانت كمية الملح فيه في البدء؟

٩. افراز الفوسفات يبلغ أدنى مستوى له عند السادسة صباحاً ويصل الى أعلى مستوى عند السادسة مساءً، فإذا كانت سرعة الافراز.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \text{ جتا } \frac{\pi}{6} (n-1)$$

غرامات في اللحظة  $n$  ( $0 \leq n \leq 24$ ) وكان الجسم يحتوي على ٤٠٠ غرام من الفوسفات. فكم تكون نسبة الفوسفات في جسم مريض في الزمن  $n$  علماً بأن هذا المريض لا يشرب إلا الماء.

١٠. في التمرين ٩ إذا سمح للمريض بتناول ثلاث وجبات يومياً حيث يأخذ جسمه الفوسفات بالسرعة  $E(n)$  على النحو التالي:

$$E(n) = \frac{1}{3} \text{ غ / الساعة}, 8 \leq n \leq 16$$

$0 \leq n < 8$  / الساعة، فيما عدا ذلك

فأوجد قانوناً بين كمية الفوسفات في جسم المريض في الزمن  $n$ . حتى يبلغ أقصى حد له؟

١١. لدينا منظومة ذات حججه واحدة فيها  $k$  ثابت

$$m(n) = p + b \text{ جا } Wn, n < p$$

أوجد حلاً لهذه المنظومة كيف تختلف هذه المنظومة فيها الوارد ثابت ومعامل التحويل الكسري دوري؟ [ انظر المعادلة (١ - ١١٣) ].





**المحددات**



## الفصل الثاني

### المحددات

#### (١-٢) اقتران المحدد:

تعريف (١-٢): لتكن  $M$  هي مجموعة المصفوفات التكوينة من الأعداد الحقيقية فإن الاقتران المعروف على النحو التالي:  $D \rightarrow C$

يسمى الاقتران  $D$  بمحدد المصفوف المربعة  $A$  وسنرمز للمحدد بالرمز  $A$  أو  $|A|$

كما يمكن التعبير عنها بالصيغة  $\Delta$  (1)

#### (٢-٢) حساب المحدد للمصفوفة المربعة

(١) إن محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الأولى على الصورة

$$|A| = [A] = 1$$

$$|A| = [A] = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(٢) إن محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية والتي هي على الصورة وهو عبارة عن الفرق بين حاصل ضرب عناصر القطر الأول بحاصل القطر الثاني.



مثال (٢-١): أوجد محدد المصفوفة  $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

الحل:  $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

مثال (٢-٢): أوجد محدد المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

الحل:  $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 2 \times 1 = 6 - 2 = 4$

مثال (٢-٣): أوجد محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} \text{جاس} & \text{جاس} \\ - \text{جاس} & \text{جاس} \end{bmatrix}$$

الحل:  $A = \begin{vmatrix} \text{جاس} & \text{جاس} \\ - \text{جاس} & \text{جاس} \end{vmatrix} = (\text{جاس} \times \text{جاس}) - (- \text{جاس} \times \text{جاس}) = \text{جاس}^2 + \text{جاس}^2 = 2 \text{جاس}^2$

مثال (٢-٤): أوجد محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 101 & 100 \\ 103 & 102 \end{bmatrix}$$

فلاحظ أن عناصر المصفوفة المعطاة هي أعداد حقيقية متتالية وعليه  
فستفرض أن العدد  $100 = 100$  وعليه يمكن كتابة المصفوفة على النحو التالي:

$$A = \begin{bmatrix} 100+1 & 100 \\ 100+3 & 100+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101 & 100 \\ 103 & 102 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 100+1 & 100 \\ 100+3 & 100+2 \end{vmatrix} = (100+1)(100+2) - (100+3)100 = 100^2 + 3 \times 100 + 2 = 100^2 + 300 + 2 = 100^2 + 302$$

(٣) المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة لتكن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



ولإيجاد محدد مثل هذا النوع من المصفوفات سنستخدم طريقتين هما:

(١) طريقة المصفوفة المصغرة والتي سترمز لها بالرمز  $M$ ، والنتيجة عن تغطية العمود (ر) والصف (ي) الذي يقع فيه العنصر  $a_{yr}$  نأخذ محدد المصفوفة المتبقية وكذلك سنرمز لعامل  $a_{yr}$  والذي يساوي

$$a_{yr} = (-1)^{r+y} M_{yr} \text{ للعنصر } a_{yr}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} = M \quad \text{مثال (٥-٢): لدينا المصفوفة}$$

والمطلوب إيجاد المصفوفة وكذلك العامل لكل من الحدود التالية  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}$$

الحل: نجد أولاً المصفوفات المصغرة المرتبطة بكل حد من الحدود أصلاً ثم نحددها وعواملها على النحو التالي:

$$a_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 31$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 10$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

$$a_{11} = 31, a_{12} = 10, a_{13} = 10$$

أما عوامل الحدود المتكافئة فهي على النحو التالي:

$$a_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \cdot 31 = 31$$



$$10 - = (10) (1 -) = 10 \cdot 1 = 10$$

$$16 - = (16) (1 -) = 16 \cdot 1 = 16$$

تعريف (٢-٢): إن محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة والتي هي على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

ويقال لمحدد المصفوفة

$$\text{محدد} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

بأنه مفكوك بالنسبة للصف الاول وعلى أية حال فإنه إذا كان المحدد قد وجد من المفكوك حسب أي صف أو أي عمود فلا اختلاف في النتيجة. وبشكل عام فإن:

$$\text{محدد} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\text{محدد} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

ملاحظة: لأي مصفوفة من الرتبة الثالثة فإن إشارة العوامل (العناصر المرافقة) عند حساب محدها سواء كان المفكوك حسب سطر معين أو عمود معين يمكن الاستعانة بالجدول (٢-١).

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

جدول (٢-١)



$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \text{مثال (٦-٢): احسب محدد المصفوفة. أ}$$

الحل: سنحل المفكوك حسب الصف الثالث وسنستعين بمجدول الاشارات  
(١-٢) ليكون المحدد على النحو:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} (2-) + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (0-) - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} (4) = | \text{أ} |$$

$$= 4 - (2 \cdot 9) - 0 - (1 \cdot 1) - (2 \cdot 1) - (3 \cdot 3) - (2 \cdot 2) = 77 -$$

مثال (٧-٢): أوجد محدد المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \text{ب}$$

الحل: نحاول عند اختيار الصف أو العمود الذي سنأخذ المفكوك بالنسبة له بأن  
يحتوي على أكبر عدد من الأصفار وهنا سنأخذ العمود الثالث لاحتواءه على  
صفرين مما يسهل العملية الحسابية وعليه فإن محدد المصفوفة ب

$$\text{محدد (ب)} = | \text{ب} | = (2-) = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} (2-) = ((0 \cdot 6) - (7 \cdot 0)) (2-) = 22 - = (11) (2-) = (24 - 35) = 22 - =$$

والآن نستطيع ان نعطي صورة أعم لهذه الطريقة وهي حساب محدد  
مصفوفة مربعة من الرتبة النونية فإذا كان لدينا المصفوفة:



$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فإن عدد المصفوفة إذا كان المفكوك بالنسبة لأي سطر هو:

$$|P| = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

أما إذا كان المفكوك بالنسبة لأي عمود فإن:

$$|P| = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

مثال (٨-٢): أوجد محدد المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل: نظرا لصعوبة الإجراءات الحسابية وخاصة كلما زادت الرتبة لذا نبدأ بالبحث عن الصف أو العمود الأكثر أصفاراً أو يعمل المفكوك على أساسه وفي مثالنا سنعمل المفكوك على أساس الصف الثالث على النحو التالي:

$$(1) + \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = |P|$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{2,3}$$



$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot (0) \cdot 2 + (1) \cdot 2 +$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} (2) \cdot 0 + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} 2 - 0 + 0 + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} 0 + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} 2 - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} (2) \cdot 3 \\ (8+2)2 - 0 + (6+2)2 - 0 + 0 + (0 + (8+9)2 - (6+3)2)3 = \\ 23 = 20 + 48 - 60 =$$

ب) قاعدة ساروس ك وهي طريقة اخرى لايجاد محدد المصفوفة ايا كانت رتبها. وسنبدأ هذه الطريقة بالمصفوفة ذات الرتبة الثالثة. والتي هي على الصورة.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وحسب هذه القاعدة فاننا:

نضيف الى اسفل المحدد للمصفوفة الاصلية او اول عمودين الى يمين محدد المصفوفة الاصلية.

نرسل اسهم تمر عبر العناصر القطرية من اقصى الزاوية اليسرى وهذه الاسهم تكون متوازية لناخذ حواصل الضرب للعناصر الواقعة على هذه الاسهم ونشير باشارة موجب (+) لكل نهاية سهم.

نرسل بالمثل اسهم من اقصى الزاوية اليمنى ونضع في نهاية كل سهم اشارة (-).

١) نبدأ باضافة الصفوف ويكون محدد المصفوفة وعليه يكون محدد المصفوفة.



$$\begin{vmatrix} 22 & 1 & -13 \\ 21 & 12 & 31 \\ 23 & 12 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 22 & 22 \\ 21 & 21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 22 & 22 \\ 21 & 21 \\ 23 & 23 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 22 & 22 \\ 21 & 21 \\ 23 & 23 \end{vmatrix}$$

أما إذا أضيقنا الأعمدة فيكون الشكل بعد الإضافة على نحو التالي :

$$\begin{vmatrix} 22 & 21 & 23 \\ 21 & 22 & 23 \\ 23 & 22 & 23 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 22 & 21 & 23 \\ 21 & 22 & 23 \\ 23 & 22 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 22 & 22 \\ 21 & 21 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 22 & 22 \\ 21 & 21 \\ 23 & 23 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 22 & 22 \\ 21 & 21 \\ 23 & 23 \end{vmatrix}$$

مثال (٩-٢):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

بطريقة ساروس بإضافة الأعمدة.

الحل:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

مثال (١٠-٢):

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

أوجد محدد المصفوفة ب:

الحل: يترك للقارئ كتارين:



### (٣-٢) خصائص المحددات

(١) إذا كانت لدينا مصفوفة مربعة ٢ من الرتبة ن فإن  $|A| = |A^T|$

مثال (١١-٢): إذا كان  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1$  أثبت أن  $|A| = |A^T|$

الحل:

$$\text{إذا كان } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \text{ فإن } |A| = |A^T| = (3)(2) - (1)(1) = 5$$

$$|A^T| = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 \Leftrightarrow |A| = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \Leftrightarrow (2)(3) - (1)(1) = 5$$

نلاحظ من أعلاه أن  $|A| = |A^T|$  وهو المطلوب.

(٢) إذا كان أحد صفوف مصفوفة مربعة أو أحد أعمدتها صفراً فإن محدد هذه المصفوفة صفراً.

$$\text{مثال (١٢-٢): لدينا المصفوفة } \begin{bmatrix} 12 & 33 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \\ 41 & 10 & 80 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{أثبت أن } |A| = 0$$

الحل:

$$0 = \begin{bmatrix} 12 & 33 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \\ 41 & 10 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 33 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \\ 41 & 10 & 80 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & 33 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 33 & 17 \end{bmatrix} = 0$$

وهو المطلوب

(٣) إذا استبدل صفراً بصف آخر أو عمود بعمود آخر أعمدة مصفوفة مربعة فإن محدد المصفوفة الناتجة بعد عملية الاستبدال مساوية لمحدد المصفوفة الأصلية عددياً ومخالف له بالإشارة:

مثال (١٣-٢)

$$\text{إذا كان } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \text{ أثبت أن } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

حيث ب هي المصفوفة بعد تبديل صفان أو عمودان لمواقعهما

الحل: نحدد أولاً  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$  ثم  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$  على النحو:

$$11 = 3 + 8 = (1 -) 3 - (4) 2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$11 - = 8 - 3 - = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

نلاحظ أعلاه أن  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$  وهو المطلوب

(٤) في أي مصفوفة مربعة إذا كان بها صفان أو عمودان متشابهان فإن محدد المصفوفة المربعة يساوي صفراً.

مثال (١٤-٢)

$$\text{إذا كان } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ فإن } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(٥) إذا كان لدينا مصفوفة مربعة وضرب صفوف أو أعمدة هذه المصفوفة في عدد ك ح فإن محدد المصفوفة بعد عملية الضرب يساوي محدد المصفوفة الأصلية مضروباً في العدد.

مثال (١٥-٢):

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{د} \\ \text{ج} & \text{ك} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{ك} \\ \text{ج} & \text{د} \end{bmatrix} = \text{أثبت أن}$$

الحل: الطرف الأيسر ك (د) - ح (ك ب) = ك (د) - ح (ب)

$$\text{ك (د) - ح (ب)} = \text{ك (د) - ح (ب)}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

٦) إذا كان هناك نسبة ثابتة بين صفي مصفوفة مربعة أو عمودي المصفوفة فإن محدد هذه المصفوفة صفراً وبشكل عام إذا كان لدينا المصفوفة

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{د} \\ \text{ج} & \text{ك} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{د} \\ \text{ج} & \text{ك} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\text{ك}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{د}}{\text{ك}}$$

ولابته هذه الخاصية نأخذ محدد المصفوفة أ أي:

$$0 = \text{ك (د) - ح (ب)} = \text{ك (د) - ح (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 8 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \text{مثال (١٦-٢): أوجد محدد المصفوفة أ}$$

الحل:

لو نظرنا الى العمود الأول والعمود الثالث لاحظنا أن هناك نسبة ثابتة بين

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

وحسب الخاصية فإن محدد المصفوفة أ هو الصفر.

(٧) إذا كان لدينا المصفوفتين أ، ب من الرتبة ن فإن:

$$| أ ب | = | أ | | ب | ، | أ ب | = | أ | | ب |$$

مثال (١٧-٢): لدينا المصفوفتين

أثبت صحة العلاقة أعلاه

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = أ ، \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = ب$$

الحل:

$$| أ ب | = | \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} | = | \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} | = 0 = | أ | | ب |$$

$$(١) - (ب) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = أ - ب$$

نلاحظ من (١) و (٢) أن | أ - ب | = | أ | | ب |

$$| أ - ب | = | أ | | ب | = | أ | | ب |$$

(٨) في محدد مصفوفة أ إذا كان كان أي عناصر من عناصر صف أ وعمود مكون من مجموع عددين فإن محدد هذه المصفوفة تكون عبارة عن مجموع من نفس الرتبة وبصيغة الرموز.

$$| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} | = | \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} | = | \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} |$$

$$= (١٨ - د - ب ح) + (٢١ - د - ب ح)$$

$$\left| \begin{array}{cc} ب & ١٨ \\ د & ح \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} ب & ٢١ \\ د & ح \end{array} \right|$$

مثال (١٨-٢):

$$\text{لدينا } \begin{vmatrix} ١٢ & ٥ \\ ٣ & ١- \\ ٦- & ٢ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix} = \text{المطلوب هو إيجاد قيمة ص}$$

الحل:

سبق وان تناولنا خاصية وهي أنه إذا كان بين عمودين في مصفوفة مربعة تناسباً ثابتاً بين العمودين فإن محدد المصفوفة صفراً أو بالاستفادة من هذه الخاصية فإننا نضع هذا التناسب بين العمود الأول والثاني

$$\frac{ص}{١٢} = \frac{١-}{٣} = \frac{٢}{٦-} = \frac{١-}{٣} = \frac{ص}{١٢} \Rightarrow ١٢- = ٣ص \Rightarrow ١٢- = ٣ص \Rightarrow ٤- = ص$$

مثال (١٩-٢):

$$\text{لدينا } \begin{vmatrix} جتا \frac{ص}{٢} & جتا \frac{ص}{٢} \\ جتا \frac{ص}{٢} & جتا \frac{ص}{٢} \end{vmatrix} = \frac{١-}{٢} \text{ أوجد اصغر قيمة للزاوية ص}$$

الحل:

نبدأ بإيجاد محدد المصفوفة ومساواته بالقيمة -٥, ٠ على النحو :

$$\frac{١-}{٢} = \left( جتا \frac{ص}{٢} + جتا \frac{ص}{٢} \right) \Rightarrow \frac{١-}{٢} = \frac{ص}{٢} \text{ جتا } \frac{ص}{٢} - جتا \frac{ص}{٢} = جتا \frac{ص}{٢}$$



$$= \text{جنا } 120 \leftarrow \frac{3}{2} = \frac{120}{1} = 3 \leftarrow 240 = \text{من } 80$$

$$\text{مثال (٢-٢٠) إذا كان } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \text{ احسب: } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

الحل: نعلم أن أ. أ. عليه فإن:

$$1 \ 0 = 1(0 -) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{مثال (٢-٢١): أوجد } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

قبل إجراء عملية المفكوك لايجاد المحدد نعمل على تبسيط المصفوفة وذلك بطرح الصف الاول من الصف الثاني ومرة من الصف الثالث لتصبح المحددة على النحو التالي:

$$\text{ونأخذ المفكوك حسب العمود الاول.} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1 = (1 -) (1 -) (1 -) (1 -) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 -) (1 -) (1 -) (1 -)$$



مثال (٢٢-٢): لدينا المصفوفة:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{أوجد مرافق العنصر ٢١ في المحدد} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{وعليه فإن } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\text{ومرافق العنصر ٢١ من } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 2) = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{مثال (٢٣-٢): أوجد محدد المصفوفة}$$

الحل:

نحاول أولاً أن نبسط المصفوفة إلى صورة البسط حتى نبسط العمليات الحسابية في إيجاد محدد المصفوفة وذلك بجمع الصف الأول مع الصف الثاني وكذلك الصف الأول مع الصف الثالث ثم بعد ذلك نأخذ المفكوك بالنسبة للعمود الرابع لنحصل على مايلي:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad (1 - 2)(1 - 3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1$$



ثم نعمل على تبسيط المصفوفة الاخيرة لايجاد محدها وذلك بضرب الصف الاول في -٢ وإضافته الى الصف الثالث لتصبح المصفوفة على النحو:

$$93 = (9 + 40 - 3) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} \cdot 1 + (1 - 3) \cdot 3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

أوجد مجموعة الحل للمعادلة.

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

الحل:

نبدأ بعملية التبسيط قبل ايجاد محدد المصفوفة وذلك بطرح الصف الثالث من الصف الثاني ثم نقوم بعمل المفكوك وفق العمود الثالث لنحصل على التالي:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3+2x & 9-2x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3+2x & 9-2x \\ 0 & 3+3 & 9-4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$(3+2x) \cdot 0 + (9-2x) \cdot 0 = 0 = \begin{vmatrix} 3+2x & 9-2x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot 1 + (1-3) \cdot 3 =$$

$$0 = (3+2x) \cdot 0 + (9-2x) \cdot 0 = 0 = 3+2x \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$0 = (2-x) \cdot 0 + (3-x) \cdot 0 = 0 = 3-x \Rightarrow x = 3$$

{3, -2}



مثال (٢-٢٤): أوجد محدد المصفوفة.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ح & ب & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

نعمل على تبسيط المصفوفة المربعة حتى يسهل أخذ المحدد وذلك بطرح العمود الاول من العمود الثاني وكذلك العمود الاول من العمود الثالث نحصل على المصفوفة ثم نأخذ المفكوك بالنسبة للصف الاول على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} 1-ح & 1-ب \\ ٢-٢ & ٢-٢ \end{vmatrix} (1-1) = \begin{vmatrix} 1-ح & 1-ب \\ ٢-٢ & ٢-٢ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-ب)(1-د) - (1-٢)(1-٢) = (1-ب)(1-د) - (1-٢)(1-٢) =$$

$$= (1-ب)(1-د) - (1-٢)(1-٢) = (1-ب)(1-د) - (1-٢)(1-٢) =$$

$$= (1-ب)(1-د) - (1-٢)(1-٢) = (1-ب)(1-د) - (1-٢)(1-٢) =$$

$$= (1-ب)(1-د) - (1-٢)(1-٢) = (1-ب)(1-د) - (1-٢)(1-٢) =$$

$$= (1-ب)(1-د) - (1-٢)(1-٢) = (1-ب)(1-د) - (1-٢)(1-٢) =$$

مثال (٢-٢٥) إذا كانت

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix} = ٠$$

أوجد: | أ. ب |

$$| \text{ب} | = \begin{vmatrix} \text{جا من} & \text{جتا من} \\ \text{جتا من} & \text{جا من} \end{vmatrix} = \text{جا من جتا من} - (- \text{جا من جتا من})$$

$$= \text{جا من جتا من} + \text{جا من جتا من} = 2 \text{ جا من جتا من} = 2 \text{ جا من}$$

$$| \text{أ} | = \begin{vmatrix} \text{جتا من} & \text{جا من} \\ \text{جتا من} & \text{جا من} \end{vmatrix} = \text{جتا من}^2 \text{ من} = \text{جتا من}^2$$

$$| \text{أ. ب} | = | \text{أ} | \cdot | \text{ب} | = \text{جتا من}^2 \text{ من جا من} = \frac{1}{4} \text{ جا من}$$

## (٤-٢) المصفوفة المصاحبة (Adjoint Matrix)

تعريف (٢-٣): يقال للمصفوفة الناشئة من مدور مصفوفة المرافقات بالمصفوفة المصاحبة والتي سنرمز لها بالرمز  $\text{Adj}(\text{A})$  وعليه فإن

$$\text{Adj}(\text{A}) = \text{A}^{\text{T}} \times \text{D}$$

ولتوضيح هذا المفهوم تناول المثال التالي:

مثال (٢-٢٦): أوجد المصفوفة المصاحبة للمصفوفة

$$\begin{vmatrix} 1 & 2- & 3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3- & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad | \text{أ} |$$

الحل: نبدأ بإيجاد مرافق كل عنصر على النحو التالي:

$$11 = (1-)(1+) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3- & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-6) = 6$$

$$١٧ = (٧ - ١٥ -) = \begin{vmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣- & ١ \end{vmatrix} ٧+١ (١ -) = ٧١$$

$$٦ - = (٦ - ٠) = \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ . & ١ \end{vmatrix} ٦+١ (١ -) = ٦١$$

$$٦ - = (٠ - ٦) = \begin{vmatrix} ١ & ٧- \\ ٣- & . \end{vmatrix} ١+٧ (١ -) = ١٧$$

$$١٠ - = ١ - ٩ - = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٣- & ١ \end{vmatrix} ١+٣ (١ -) = ٣١$$

$$٧ - = (٧ +) - = \begin{vmatrix} ٧- & ٣ \\ . & ١ \end{vmatrix} ٧+٣ (١ -) = ٣٧$$

$$١٠ - = (٦ - ٤ -) = \begin{vmatrix} ١ & ٧- \\ ٧ & ٦ \end{vmatrix} ١+٧ (١ -) = ١٧$$

$$١ - = (٥ - ٦) - = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} ١+٣ (١ -) = ٣١$$

$$٢٨ = (١٠ + ١٨) = \begin{vmatrix} ٧- & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{vmatrix} ٧+٣ (١ -) = ٣٧$$

وعليه فإن مصفوفة المرافقات

$$\begin{vmatrix} ٦- & ١٧ & ١٨- \\ ٧- & ١٠- & ٦- \\ ٢٨ & ١- & ١٠- \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ١ \\ ١ \\ ١ \end{vmatrix}$$

## (٥-٢) نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الضرب

نبدأ توضيح هذا المفهوم الهام في نظرية المصفوفات بالتعريف التالي:

تعريف (٤-٢):

لتكن لدينا أ مربعة من الرتبة ن وإذا وجد مصفوفة مربعة من الرتبة ن مثل ب وتحقق الشرط التالي أ. ب = ب. أ = و

فإننا نسمي المصفوفة ب بأنها المصفوفة النظرية بالنسبة لعملية الضرب وسنرمز لها أيضا بالرمز  $A^{-1}$

ملاحظة: حتى يكون للمصفوفة المربعة مصفوفة نظرية بالنسبة لعملية الضرب فإنه يتوجب أن يكون محدها لا يساوي صفراً.

### (١-٥-٢) خصائص المصفوفة النظرية

(١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

(٢) نظير المصفوفة النظرية هي المصفوفة الأصلية

$$I^{-1} = I$$

(٣) نظير مبدول المصفوفة = مبدول نظير المصفوفة

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

(٤) إذا كان لدينا المصفوفتين المربعيتين أ، ب من الرتبة ن فإن:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

(٥) إذا كان لدينا أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

(٦) إذا كان لدينا مصفوفة مربعة فإن  $(A^{-1})^{-1} = A$

(٧) إذا كانت مصفوفة مربعة فإن  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

مثال (٢٧-٢): أوجد نظير المصفوفة المربعة الضربي  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

الحل: نفرض أن المصفوفة النظرية بالنسبة لعملية الضرب

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+b & 2c+d \\ 4a+3b & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2a+b=1, 2c+d=0, 4a+3b=0, 4c+3d=1$$

وبمبحث تحقق الشرط الوارد في التعريف (١٠-١) أي ومن تساوي المصفوفتين فإننا نكتب نظام المعادلات التالية:

$$2a+b=1, 2c+d=0$$

$$4a+3b=0, 4c+3d=1$$

وبحل هذه الانظمة نجد أن:

وعليه فإن المصفوفة النظرية للمصفوفة  $A$  بالنسبة لعملية الضرب هي:

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$



مثال (٢٨-٢):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = A \text{ بالنسبة لعملية الضرب، أوجد المصفوفة النظرية للمصفوفة } A$$

الحل: نحدد محدد المصفوفة  $A$  على النحو:

$$0 = 4 - 4 = (2 - 2) - (1)(1) = |A|$$

ويكون محدد المصفوفة  $A$  يساوي صفراً فإن هذه المصفوفة ليس لها مصفوفة نظرية.

(٢ - ٥ - ٢) إيجاد المصفوفة النظرية لأي مصفوفة باستخدام المصفوفة المصاحبة

قاعدة: إذا كان  $A$  مصفوفة مربعة من الرتبة  $n$ ، ويكون

$$(|A| \neq 0) \Rightarrow |A|^{-1} = (adj A) \text{، و } |A|^{-1} = (adj A)^{-1}$$

$$adj A = |A|^{-1} \Rightarrow |A| = (adj A)^{-1} =$$

ويمكن تلخيص القاعدة بالخطوات التالية:

(١) نجد المحدد  $A$  فإذا كان  $|A| \neq 0$  فإنها مصفوفة نظرية.

(٢) نجد مصفوفة المرافقات.



(٣) نجد مبدول المرافقات لتحصل بمصفوفة المصاحبات التي سنرمز لها بالرمز  $\text{adj } A$ .

(٤) نجد المصفوفة النظرية  $A^{-1}$  من العلاقة.

$$| \text{adj } A \cdot A^{-1} | = | I |$$

مثال (٢٩-٧) على اعتبار أن  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $A^{-1} = B$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $B^{-1} = C$ ،  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الضرب

الحل: لتكن المصفوفة  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

هي المصفوفة النظرية للمصفوفة  $A$ . ومن كون  $A \cdot B = I$  و  $B \cdot A = I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 & 1+0+0 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتين  $\Rightarrow$

$$1+0+1 = 2, 0+0+0 = 0, 1+0+0 = 1, 0+0+0 = 0, 1+0+0 = 1, 0+0+0 = 0, 0+0+0 = 0$$

$$ح + أ = ف ، د + أ = و ، ز + أ = هـ ،$$

$$ف = و ، و = هـ ، هـ = أ ،$$

بالتعويض عن هذه القيم في المعادلات أعلاه وبمحل نظام المعادلات

$$س = أ ، ص = و ، ص = ب - ٢ ، ح = و ، د = أ ،$$

$$ز = -ب ، ف = و ، و = هـ ، هـ = أ ،$$

وعليه فإن نظير المصفوفة أ الضربي هو:

$$ب = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

ملاحظة: إذا كان لدينا مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

$$\begin{bmatrix} ب & د \\ ا & ح \end{bmatrix} ، \begin{vmatrix} ب & د \\ ا & ح \end{vmatrix} = ب \cdot ح - د \cdot ا \neq ٠$$

$$\frac{\begin{bmatrix} ب & د \\ ا & ح \end{bmatrix}}{ب \cdot ح - د \cdot ا} = ا^{-١} ب^{-١}$$

وهنا مصفوفة البسط ما هي الا المصفوفة المصاحبة والناجمة من تبديل مواقع عناصر القطر الأيسر (الرئيسي) مع تغير إشارة عناصر القطر الأيمن (القطر الثانوي).

مثال (٣٠-٢):

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = ا^{-١} ب^{-١}$$

الحل: نجد أولاً عدد المصفوفة أ

$$\varepsilon = (2 -) (3 -) - (1 -) (2 -) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = |1|$$

وباستخدام العلاقة أعلاه فإن:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\varepsilon} & \frac{1-}{\varepsilon} \\ \frac{2}{\varepsilon} & \frac{3-}{\varepsilon} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1- \\ 2 & 3- \end{bmatrix}}{\varepsilon} = \frac{[adj A]}{|1|} \quad 1-1$$

مثال (٣١-٢):

أوجد المصفوفة النظرية بالنسبة لعملية الضرب للمصفوفة أ

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1- & 3 & 3 \end{bmatrix} = 1$$

الحل:

(١) نجد عدد المصفوفة أ على النحو التالي:

$$1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3- \end{bmatrix} 0 + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1- & 3- \end{bmatrix} 4 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1- & 3 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1- & 3 & 3 \end{bmatrix} = 1$$

$$(6+12) + (10+4-) \varepsilon - (10-2-)$$

$$29 = 90 + 4\varepsilon - 17 - =$$

نجد مرافقات كل عناصر المصفوفة الأصلية

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -11 \text{ ، } 17 = (10 - 2) + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + = 11$$

$$11 = (0 + 4) -$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -11 \text{ ، } 18 = (6 + 12) - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + = 11$$

$$19 = (0 - 4) - =$$

$$14 = (10 + 1) + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + = 11$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -11 \text{ ، } 10 = (12 + 3) - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - = 11$$

$$10 = (10 -) = (20 - 0)$$

$$+ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + = 11 \text{ ، } 10 = (10 - 20) + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + = 11$$

$$14 = (16 - 3)$$

نكتب مصفوفة المرافقات

$$\begin{bmatrix} 18 & 11 & 17 \\ 10 & 14 & 19 \\ 14 & 10 & 10 \end{bmatrix} = [A^{-1}]$$

نجد المصفوفة المصاحبة

$$\begin{bmatrix} 10 & 19 & 17 \\ 10 & 14 & 11 \\ 14 & 10 & 18 \end{bmatrix} = {}^t[A^{-1}] = \text{adj } A$$

وعليه فإن المصفوفة النظرية هي:

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{29} & \frac{19}{29} & \frac{17-}{29} \\ \frac{15}{29} & \frac{14}{29} & \frac{11-}{29} \\ \frac{14-}{29} & \frac{15-}{29} & \frac{18}{29} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19 & 17- \\ 15 & 14 & 11- \\ 14- & 15- & 18 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{29} = \frac{\text{adj}}{|I|} = I^{-1}$$

مثال (٣٢-٢):

لدينا المصفوفتين  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  أوجد المصفوفة ج بحيث  $B = A \cdot H$

الحل: نبدأ بوضع المعطيات  $A \cdot H = B$

ثم نقوم بضرب كلا طرفي المعادلة بالمصفوفة النظرية  $A^{-1}$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot H) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot H = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot H = A^{-1} \cdot B \Rightarrow H = A^{-1} \cdot B$$

ثم نأخذ النظير الضربي لكلا الطرفين:

$$(H^{-1})^{-1} = (A^{-1} \cdot B)^{-1} \Rightarrow H = B^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} \Rightarrow H = B^{-1} \cdot A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

وبهذا يمكن إيجاد المصفوفة هـ على النحو:

$$[ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix} ] = [ \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix} ] [ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} ] = 1 - 1 = 0$$

مثال (٣٣-٢):

لدينا المصفوفة أ  $[ \begin{smallmatrix} 2- & 1 \\ ب & ٤- \end{smallmatrix} ]$  وان نظيرها الضربي هو نفسها أوجد أ-ب

الحل:

من المعطيات نلاحظ أن  $1 - 1 = 0$  وضرب كلا طرفي المعادلة بالمصفوفة أ

$$[ \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} ] 0 = [ \begin{smallmatrix} 2- & 1 \\ ب & ٤- \end{smallmatrix} ] [ \begin{smallmatrix} 2- & 1 \\ ب & ٤- \end{smallmatrix} ] = 1.1 = 0 \text{ و } 1.1 = (1.1)$$

$$\text{ومن تساوي المصفوفتين} [ \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} ] = [ \begin{smallmatrix} 2ب+1٢ & ٨-٢ب \\ ٨-٢ب & ٤-٢ب \end{smallmatrix} ]$$

$$3- = 1 \Leftarrow 9 = ٢ب \Leftarrow 1 = ٨ - ٢ب$$

$$٣ = ب \Leftarrow 9 = ٢ب \Leftarrow ١ = ٨ - ٢ب$$

وعليه فإن:

$$٩ = -ب = ١ - ٣ \text{ ومنه } ٣ = -ب = ١ \text{ أو } (٣ = ب \text{ أو } ٣ = -ب = ١)$$

## (٦-٢) المصفوفة المنفردة وغير المنفردة

( Matrix Singular and non Singular )

تعريف (٥-٢): تسمى المصفوفة المربعة أ من الرتبة ن مصفوفة منفردة إذا كان

$$\Delta = |A| \neq 0$$

أما إذا كان  $\Delta = |A| = 0$  فإن المصفوفة تكون مصفوفة غير منفردة

مثال (٤-٣) لدينا المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  فهل المصفوفة أ مصفوفة منفردة

الحل:

نجد محدد المصفوفة أ على النحو التالي  $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (3)(0) - (4)(2) = 0 - 8 = -8 \neq 0$  فالمصفوفة أ غير منفردة.

مثال (٥-٣): لدينا المصفوفة ب  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  فهل المصفوفة ب منفردة؟

الحل:

المصفوفة ب منفردة لان محدها يساوي صفر حيث أن الصف أول والثالث في المصفوفة متشابهان.



## (٧-٢) المصفوفة المحتواة (sub matrix)

تعريف (٦ - ٢): لتكن المصفوفة  $A$  من الرتبة  $n \times m$  فنسمي المصفوفة نفسها أو التي حذف بعض سطور أو أعمدة منها والناجمة بعد عملية الحذف بالمصفوفة الجزئية أو المحتواة.

مثال (٣٦ - ٢):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \quad \text{كون مصفوفتين جزئيتين لهذه المصفوفة.}$$

الحل: المصفوفة الناجمة من حذف السطر الرابع من المصفوفة الاصلية.

## (٨-٢) درجة المصفوفة (the rank of a matrix)

تعريف (٧ - ٢): يقال لرتبة المصفوفة المربعة غير المنفردة والتي هي محتواة في المصفوفة أعلى أنها درجة المصفوفة.

ملاحظة:

(١) إذا كان لدينا المصفوفة من الرتبة  $n \times m$  مصفوفة مربعة وإذا كان  $A \neq 0$  فإن درجة المصفوفة درجة (١) =  $n$ .

(٢) إذا كانت المصفوفة من الرتبة  $n \times m$  فإن درجة المصفوفة درجة (١)  $\geq$  أقل  $(m, n)$ .

مثال (٣٧-٢): لدينا المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  أوجد درجة هذه المصفوفة

$$0 \neq 10 - 12 = 2 = (4)(3) - (2)(1) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = |A|$$

∴ درجة المصفوفة  $A$  هي ٢.

مثال (٣٨-٢): أوجد درجة المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

الحل: نجد أولاً محدد المصفوفة المعطاة أي

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 3 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} (3) - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} (0) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = |A|$$

$$0 = 3 - 3 = (2 - 1)3 + (2 - 3)3 + 0 =$$

∴ درجة المصفوفة  $(A)$   $3 > 1$ .

نختار مصفوفة مربعة مرتبتها  $2 \times 2$  من المصفوفة  $A$  ثم نجد محددها فإذا اختلف عن الصفر فإن درجة المصفوفة يتحدد فلتكن هذه المصفوفة.

$$0 \neq 1 - 2 = -1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = |A|$$

∴ فدرجة المصفوفة  $A$  من الدرجة الثانية

مثال (٣٩-٢): لتكن المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$



الحل: لكون المصفوفة من الرتبة  $4 \times 3$  فإن درجة المصفوفة

درجة (1)  $3 \geq$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1- & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 \text{ تختار مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ولتكن } 1$$

وعليه فإن محدد المصفوفة على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} 5 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} 2 - \begin{vmatrix} 1- & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} 1 + = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1- & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$0 \neq 30 + 20 + 8 + 3 = (3+2)5 + (6-2)2 - (2-1-1) =$$

E درجة المصفوفة من الدرجة الثالثة.

مثال (٤٠-٢):

$$\text{إذا كانت درجة المصفوفة } 1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3+p \\ 3- & 4 & 1- \\ 1- & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ تساوي } 2 \text{ فأوجد قيمة } p$$

الحل:

لأن درجة المصفوفة 2 معنى ذلك ولكونها من الرتبة الثالثة فإن محدد المصفوفة من هذه الرتبة يساوي الصفر وعليه لو أخذنا المفكوك بالنسبة للصف الثالث فإن:

$$0 = (2 + (3 + p)4) - = \begin{vmatrix} 2 & 3+p \\ 4 & 1- \end{vmatrix} 1 - = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3+p \\ 3- & 4 & 1- \\ 1- & 0 & 0 \end{vmatrix}$$





$$\frac{7-}{3} = \frac{14-}{4} = \leftarrow 14 - = 14 \leftarrow 0 = 2 + 12 + 14 \leftarrow$$

## (٢-٩) المصفوفات ونظم المعادلات الخطية matrix and linear equation systems

تعريف (٢-٨): على اعتبار أن

م لـ ص، +، س ١، س ٢، .....، س ن ح، ١١ م، ٢١ م، ....، م م ح

فنسمي النظام الناتج من م معادلة من النوع

$$١١ م + ٢١ م + ..... + م م = ١$$

والمحتوي على ن مجهول والذي هو على النحو التالي:

$$ظ ز م + ١١ م + ٢ م + ..... + م م = ب ١$$

$$١٢ م + ٢٢ م + ٢ م + ..... + م م = ب ١$$

.....

$$م م + ١ م + ٢ م + ..... + م م = ب م$$

بنظام المعادلات الخطية المكون من م معادلة

ونسمي ١١، ٢١، .....، م م معادلات المعادلة الثابتة أما س ١، س ٢، .....،

س ن فنسميها مجاهيل المعادلة. وعندما نتحدث عن حل النظام نعني بذلك إيجاد

قيم المجاهيل في النظام ظ. وقبل التفكير بحل النظام وعندها نتعرف على

المصفوفات.

(١) مصفوفة الثوابت: وهي معاملات المجاهيل في كل معادلة وتكتب على شكل مصفوفة على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = 1$$

(٢) مصفوفة الثوابت وهي عناصر الطرف الايمن والتي مسترمز لها بالرمز ب

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \text{حيث ب}$$

(٣) تكون مصفوفة المعاملات والثوابت على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{bmatrix} = [A / B]$$

(٤) نضع النظام ظ على صورة يمكن معها حل هذا النظام على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A x = B$$

مثال (٤-٢): لدينا نظام المصفوفات التالي:

$$7x_3 - 5x_2 = 7$$

$$٢س١ + ٢س٢ + ٣س٣ = ١$$

$$٤س١ + ٥س٢ - ٣س٣ = ٢$$

والمطلوب:

كتابة مصفوفة المعاملات Coefficient Matrix

مصفوفة الثوابت Constants Matrix

مصفوفة المعاملات والثوابت Coefficient Matrix and Constants

مصفوفة المجاهيل Unknown Matrix

تعريف (٩-٢): إذا أجريت للمصفوفة أ عدة عمليات صفية فإن المصفوفة الناتجة

ب هي مصفوفة مكافئة للمصفوفة أ ويرمز لها بـ  $A = B$

وتكون درجة المصفوفتان المتكافئتان متساويتان

مثال (٤٢-٢): باستخدام العمليات الصفية لحل نظام المعادلات التالية:

$$\{ ١س١ + ٢س٢ + ٣س٣ = ١, ..... ٦س٣ = ١م \}$$

$$٢س١ + ٣س٢ + ٢س٣ = ٤, ..... ١س٣ = ٢م$$

$$٣س١ + ٢س٢ - ٣س٣ = -٢, ..... ٢س٣ = ٣م$$

نجري عمليات الصف التالية لنحصل على النظام المكافئ التالي ظ١

وذلك:

$$٢م \leftarrow ٢م + (٢-) ١م, ٣م \leftarrow ٣م + (-٣) ١م$$

لنحصل على نظام ظ ← ظ١



$$١٠ \text{ من } ٣ = ٣٠ \quad ٣٠ \dots ٣٢$$

وبإجراء العملية الصفية التالية:

$$٣٢ \leftarrow ٣٢ \frac{١}{١٠}$$

نحصل على نظام (ظه) المكافئ للنظام (ظه)

$$\{ \text{ظه} \} = \{ ١ \text{ من } ١ + ٢ \text{ من } ٢ + ٣ \text{ من } ٣ = ٦ \dots ١٢ \}$$

$$٢ \text{ من } ٢ + ٣ \text{ من } ٣ = ٤ \quad ٢٢ \dots$$

$$٣ \text{ من } ٣ = ٩ \quad ٢٢ \dots$$

نلاحظ من النظام الاخير أنه تكون نظام معادلات على شكل مثلث  
وينتج أن  $٣ = ٣$  وبالتعويض في  $٢٢$  عن  $٣$  بالقيمة  $٣$  ينتج أن  $٢ = ٢$   
وبالتعويض عن  $٢$ ،  $٢٢$  في معادلة  $١٢$  ينتج أن  $١ = ١$   
الحل:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ٣ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١- & ٥- & ٤ \end{bmatrix} = \text{مصفوفة المعاملات أ}$$

$$\begin{bmatrix} ٧ \\ ١- \\ ٢ \end{bmatrix} = \text{مصفوفة الثابت ب}$$

$$\begin{bmatrix} ٧ \\ ١- \\ ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ٣ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١- & ٥- & ٤ \end{bmatrix} = [ \text{ب} / \text{أ} ] = \text{مصفوفة المعاملات والثوابت}$$

$$\begin{bmatrix} ١ م \\ ٢ م \\ ٣ م \end{bmatrix} = \text{مصفوفة المجاهيل م}$$

## (١٠-٢) طرق حل أنظمة المعادلات الخطية:

١) طريقة الصف البسيط لحل أنظمة المعادلات الخطية تمثل هذه الطريقة بالخطوات التالية:

- ليكون  $م, ي, م, ر$  هو ترتيب لمعادلات مختلفة من النظام  $ظ$  فيمكن تبديل موقع معادلة بمعادلة أخرى وهذه العملية توضحها بالعلاقة  $م ي \leftrightarrow م ر$ .

يمكن ضرب أي معادلة بعدد حقيقي ( $\Rightarrow$ ) بحيث أن  $\Rightarrow ح - \{٠\}$  وتوضح هذه العملية على النحو  $م ر \leftarrow \Rightarrow م ر$ .

ضرب أي معادلة  $١ م$  بعدد  $\Rightarrow ح - \{٠\}$  وإضافة ناتج الضرب إلى معادلة أخرى بحيث تتأثر المعادلة المضاف إليها ولا تتأثر المعادلة الضرورية ويمكن تمثيل هذه العملية على النحو  $م ر \leftarrow م ر + \Rightarrow ي$  ملاحظة:

يمكن تطبيق الخطوة الثانية والثالثة كل على حدى لعمليتين منفصلتين:

تعريف (١٠-٢): يقال لنظم المعاملات الخطية  $ظ$  والناتج من إجراء عمليات متتالية على  $ظ$  بأنه نظام مكافئ للنظام.

ظا وتكتب على الصورة ظا = ظا ان مجموعة حل كل نظام من المعاملات الخطية متساوية وعليه اذا حصلنا على حل للنظام ظا بعد عمليات صفية متكافئة فإن هذا الحل يعتبر حل للنظام ظا المكافئ له أيضا.

وفلسفة هذه الطريقة تقوم على البدء بمصفوفة المعاملات والثابت لنعتبره نظام معاملات أولي ظا

**حل نظام المعادلات الخطية باستخدام طريقة كريمر:**

(١) حل نظام المعادلات الخطية بمجهولين:

(٢) اذا كان عدد الجاهيل يساوي عدد المعاملات نبدأ بالانظمة ذات المجهولين ومعادلتين على النحو التالي:

$$١١\text{ب} + ١٢\text{ب} = ٢ \text{ س } ١\text{ب}$$

$$١٢\text{ب} + ٢٢\text{ب} = ٢ \text{ س } ٢\text{ب}$$

$$\begin{vmatrix} ١١\text{ب} & ١٢\text{ب} \\ ١٢\text{ب} & ٢٢\text{ب} \end{vmatrix} = \Delta \text{ لنرمز لمحدد مصفوفة المعاملات}$$

كذلك لنرمز لمحدد المتغير س١ بالرمز  $\Delta$

$$\begin{vmatrix} ١\text{ب} & ١١\text{ب} \\ ٢\text{ب} & ١٢\text{ب} \end{vmatrix} = ٢ \Delta \cdot \begin{vmatrix} ١١\text{ب} & ١\text{ب} \\ ١٢\text{ب} & ٢\text{ب} \end{vmatrix} = ١ \Delta$$

وعليه يمكن كتابة النظام أعلاه على نحو:



$$\frac{1\Delta}{\Delta} = 1\text{س} \Leftarrow 1\Delta = 1\text{س}\Delta$$

$$\frac{2\Delta}{\Delta} = 2\text{س} \Leftarrow 2\Delta = 2\text{س}\Delta$$

ويسمى هذا الحل بطريقة كرمير لحل المعاملات وتكون مجموع الحل

$$\left\{ \frac{2\Delta}{\Delta}, \frac{1\Delta}{\Delta} \right\}$$

ملاحظة:

(١) إذا كان  $\Delta \neq 0$  فانه يوجد حل وحيد لنظام المعاملات أي أن الحل هو نقطة تقاطع الخطين الممثلين لكل معادلة.

(٢) إذا كان  $\Delta = 0$  وكان على الأقل أحد  $1\Delta, 2\Delta$  يختلف عن الصفر فانه لا يوجد حل لهذا النظام ومعنى ذلك أن الخطين الممثلان لكل معادلة متوازيان.

(٣) أما إذا كان  $\Delta = 0, 1\Delta = 2\Delta = 0$  فانه يوجد عدد لانهاضي لهذا النظام.

مثال (٤٣-٢): باستخدام طريقة كرمير حل نظام المعادلات التالية:

$$3\text{س} - 1\text{س} = 1$$

$$4\text{س} + 2\text{س} = 7$$

الحل: نجد اولاً محدد المصفوفة المعاملات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-4) = 10 \neq 0$$

ولكون  $\Delta \neq 0$  فانه يوجد حل وحيد لهذا النظام ثم نجد:



$$0 = (1 -) \cdot 7 - 2 \cdot (1 -) = \begin{vmatrix} 1- & 1- \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1\Delta$$

$$20 = (1) \cdot (4) - (7) \cdot 3 = \begin{vmatrix} 1- & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 2\Delta$$

$$\frac{1}{2} = \frac{0}{10} = \frac{1\Delta}{\Delta} = 1 \text{ س}$$

$$\frac{0}{2} = \frac{20}{10} = \frac{2\Delta}{\Delta} = 2 \text{ س}$$

مثال (٤٤-٢): باستخدام طريقة كرامر حل نظام المعادلات التالية ثم أوجد مجموعة الحل:

$$7 \text{ س} - 1 \text{ س}^3 = 2$$

$$7 \text{ س} - 1 \text{ س}^6 = 2$$

$$\text{الحل: نجد محدد مصفوفة المعاملات } \Delta = \begin{vmatrix} 3- & 1 \\ 6- & 2 \end{vmatrix} = \Delta = 2 \cdot (3 -) - (6 -) \cdot 1 = 2 \cdot (3 -) - (6 -) \cdot 1 = 0$$

لذا فاما أن لا يكون للنظام حل أوعد لا نهائي من الحلول وعليه فإننا نجد  $1\Delta, 2\Delta$ :

$$0 \neq 63 = 7 \cdot (3 -) - (6 -) \cdot (7 -) = \begin{vmatrix} 3- & 7- \\ 6- & 7 \end{vmatrix} = 1\Delta$$

$$0 \neq 21 = 2 \cdot (7 -) - (7) \cdot 1 = \begin{vmatrix} 7- & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta$$

لذا فإن النظام ليس له حل وتكون مجموعة الحل  $\emptyset$

(ب) إذا كان عدد المجاهيل لا يساوي عدد المعادلات فإذا كان:

(١) عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات فإن للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

(٢) في حالة ما إذا كان عدد المجاهيل أقل من عدد المعادلات فإننا نأخذ عدد من المجاهيل مساو لعدد المعادلات ومحل النظام فإذا كانت مجموعة الحل تحقق باقي المعادلات فإن الحل يكون وحيداً أما إذا لم تحقق فلا يوجد حل لهذا النظام.

مثال (٤٥-٢): أوجد مجموعة حل نظام المعادلات التالية  $٢س - ٤ص = ٦$

$$\text{الحل: } ك \supseteq ح, ص = ك \Leftrightarrow ٢س - ٤ص = ٦ = ٤ك$$

$$\Leftrightarrow ٢س = ٤ك + ٦$$

وعليه فإن النظام له مجموعة من لانهايي =  $\{ (٢ك + ٣, ك) : ك \supseteq ح \}$

مثال (٤٦-٢): حل نظام المعادلات التالية:

$$٢س + ٤ص = -٤$$

$$٥س + ٣ص = ١$$

$$٢س - ٧ص = ٧$$

الحل: نأخذ النظام المكون من أول معادلتين لأن عدد المجاهيل مجهولين:

$$٢س + ٤ص = -٤$$

$$٥س + ٣ص = ١$$

ثم نبدأ بحل هذا النظام بالطرق السابقة وذلك بإيجاد:

$$V_- = 10 - 2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$21 = 20 + 1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\Delta, 12 = 2 - 12 = - = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\Delta$$

$$3 = \frac{21}{V_-} = \frac{2\Delta}{\Delta} = \text{ص}, 2 = \frac{14}{V_-} = \frac{1\Delta}{\Delta} = \text{س}$$

وبالتعويض عن قيم س، ص في المعادلة الثالثة:

$$V = (3-) - (2)2$$

$$V = 7$$

وبما ان مجموعة الحل الناتجة حققت المعادلة الثالثة:

∴ مجموعة الحل للنظام هي { (2, 3-) }

حل نظام المعاملات الخطية ذات الثلاثة مجاهيل ليكن لدينا نظام المعادلات

التالية:

$$11 \text{ س} + 1 \text{ أ} + 2 \text{ ب} = 31 \text{ أ} + 3 \text{ س} = \text{ب}$$

$$12 \text{ س} + 1 \text{ أ} + 2 \text{ ب} = 32 \text{ أ} + 2 \text{ س} = \text{ب}$$

$$13 \text{ س} + 1 \text{ أ} + 2 \text{ ب} = 33 \text{ أ} + 2 \text{ س} = \text{ب}$$

لحل مثل هذا النظام نجد وكما سبق محددات كل من مصفوفة المعاملات

ومحددات كل من المتغيرات:

س، 2، س، 3 وذلك على نحو التالي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

وهناك ثلاث احتمالات

(١) إذا كانت  $\Delta \neq 0$  فإن الحل الوحيد لهذا النظام هو

$$\left\{ \left( \frac{r\Delta}{\Delta} = r, \frac{r\Delta}{\Delta} = r, \frac{r\Delta}{\Delta} = r \right) \right\}$$

(٢) إذا كانت  $\Delta = 0$  وكان أحد  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  يختلف عن العنصر فإنه لا يوجد حل لهذا النظام.

(٣) إذا كان  $\Delta = 0$ ،  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$  فإن للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

مثال (٤٧-٢): باستخدام طريقة كرامر حل نظام المعادلات التالية:

$$x - y + z = 15$$

$$3x - y + z = 18$$

$$5x + y - z = 8$$

الحل: نجد المحددات  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  على النحو التالي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ وعليه فإن للنظام حل وحيد ولذا نجد محددات}$$

التغيرات

$$\Delta_{370} = \begin{vmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 2 & 18 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 2\Delta, \Delta_{47} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 18 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\Delta$$

$$111 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 18 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\Delta$$

وعليه يكون الحل الوحيد هو:

$$= (س، ص، ع)$$

$$\left( \frac{3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{2}{2} \right) = \left( \frac{111}{74}, \frac{370}{74}, \frac{74}{74} \right) = \left( \frac{3\Delta}{\Delta}, \frac{5\Delta}{\Delta}, \frac{1\Delta}{\Delta} \right)$$

مثال (٤٨-٢): باستخدام طريقة كرامر حل نظام المعادلات التالية:

$$2س - ص + ع = 4$$

$$س + 3ص + 2ع = 12$$

$$3س + 2ص + ع = 16 \text{ ثم أوجد مجموعة الحل:}$$

الحل: نجد أولاً محددة مصفوفة المعاملات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وعليه اما ان لا يكون هناك حل للنظام أو قد يكون هناك عدد لا نهائي من الحلول.

وهذا يعتمد على كل من محددات المتغيرات المعطاة:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 13 & 3 & 1 \\ 16 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_{40} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 12 & 1 \\ 3 & 16 & 3 \end{vmatrix} = 2\Delta_{40} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 1\Delta$$

لذا فإن للنظام عدد لا نهائي من الحلول وللبحث عن مجموعة الحل

نستخدم مبدأ الصف البسيطة:  $3س - ص + ع = 4$  ..... ١م

$$س + 3ص + 2ص = 12 \text{ ..... ٢م}$$

$$3س + 2ص + ع = 16 \text{ ..... ٣م}$$

$$1م \leftarrow 1م - ٢م, ٢م - ٣م \leftarrow ٢م - ٣م + ٢م$$

وبتطبيق عمليات الصف البسيطة لنحصل على النظم المتكافئة:

$$\{ 7ص - ع = 20 \} \approx \{ 3س + 2ص + ع \approx \{ 3س + 2ص + ع = 4$$

$$س + 3ص + ع = 12 \quad 7ص - ع = 20 \quad 3س - ع = 20$$

$$7ص - ع = 20 \quad 3س - ع = 20$$

نفرض أن  $ك \in \mathbb{C}$  ولناخذ  $ك = ٧$  في هذا النظام لنحصل على:

$$ص = \frac{٢٠ - ٣ك}{٧} = \frac{٢٠ - ٢١}{٧} = -\frac{1}{7}$$

$$س = 12 - 3ص - ع = 12 - 3(-\frac{1}{7}) - ٧ = \frac{٢٤ - ٢١}{٧} = \frac{3}{7}$$

ويكون حل النظام بدلالة ك على النحو التالي:

$$\left( \begin{matrix} \text{س، ص، ع} \end{matrix} \right) = \left( \frac{50-24}{7} = \frac{26}{7}, \frac{33-20}{7} = \frac{13}{7}, \text{ك} \right)$$

وعليه فيكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول معتمداً على قيمة ك وعلى سبيل المثال فلو فرضنا قيمة:

ك = ٥ - فإن هذا الحل يصبح

$$\left( \begin{matrix} \text{ظ} \end{matrix} \right) = \left( \frac{50-24}{7} = \frac{26}{7}, \frac{33-20}{7} = \frac{13}{7}, \text{ك} \right)$$

### حل نظام المعادلات الخطية المتجانسة:

ان ما يميز هذا النوع من المعادلات أن الطرف الآخر يساوي صفراً  
فالأنظمة التالية تمثل أنظمة متجانسة.

$$١١ \text{ س} + ٢١ \text{ ص} + ٣١ \text{ ع} = ٠$$

$$١٢ \text{ س} + ٢٢ \text{ ص} + ٣٢ \text{ ع} = ٠$$

$$١٣ \text{ س} + ٢٣ \text{ ص} + ٣٣ \text{ ع} = ٠$$

وفي هذا النظام يتساوي فيه عدد المجاهيل مع عدد المعادلات وقد يقل عدد المعادلات عن عدد المجاهيل أيضاً كما هو الحال في هذا النظام:

$$١١ \text{ س} + ٢١ \text{ ص} + ٣١ \text{ ع} = ٠$$

$$١٢ \text{ س} + ٢٢ \text{ ص} + ٣٢ \text{ ع} = ٠$$



وللبحث عن حلول هذه الانظمة من المعادلات نجد المحددات المرافقة لكل من المتغيرات المعطاه.

$$\begin{vmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 11 & 11 & 0 \\ 11 & 11 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Delta$$

خاصية من خصائص المحددات:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 11 & 11 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix} = 3 \Delta, \quad 0 = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 11 \\ 11 & 0 & 11 \\ 11 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2 \Delta$$

ولكون  $0 = 3 \Delta = 2 \Delta = 1 \Delta$  يظهر لدينا احتمالين:

(١) هناك حل وحيد لهذا النظام اذا كان  $0 \neq \Delta \Leftrightarrow (ص١, ص٢, ص٣) = (0, 0, 0)$

(٢) اذا كانت  $0 = \Delta$  فإن هناك عدد لا نهائي لأي من الحلول.

مثال (٤٩-٢): حل نظام المعادلات المتجانسة التالية

$$3ص - 4ص = 0$$

$$2ص + 3ص = 0$$

الحل: نجد أولا محدد مصفوفة المعاملات

$$0 \neq 11 = 8 + 3 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta$$



\* يوجد حل وحيد لهذا النظام وهو  $(س، ص) = (٠، ٠)$

\* المعادلات المتجانسة التالي  $س - ص + ٢ع = ٠$

مثال (٥٠-٢): حل نظام المعادلات المتجانسة التالي:

$$س - ص + ٢ع = ٠$$

$$٢س + ص - ٣ع = ٠$$

$$٤س - ص + ع = ٠$$

الحل: نجد أولاً محدد مصفوفة المعاملات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١- & ١ \\ ٣- & ١ & ٢ \\ ١ & ١- & ٤ \end{vmatrix}$$

ولأن هذا المحدد صفراً فإنه يوجد لهذا النظام عدد لا نهائي من الحلول وللبحث عن الحل نستخدم طريقة الصف البسيطة:

$$٢م \leftarrow ٢س + ١ص + ٢ع$$

$$١م \leftarrow س - ص + ٢ع = ٠ \dots$$

$$٢م \leftarrow ٢س + ص - ٣ع = ٠ \dots$$

$$٣م \leftarrow ٤س - ص + ع = ٠ \dots$$

والنظام المكافئ لهذا النظام بعد سلسلة من العمليات

$$٠ = س - ص + ٢ع$$

$$ص + ص - ع = ٠$$

وعلى اعتبار أن  $ك \geq ٠$  وباختيار  $ك = ع$  لنحصل على النظام التالي

$$ص - ص = - ٢ ك$$

$$٢ ص + ص = ٣ ك$$

وبحل هذا النظام نحصل على حل مرتبط بالمتغير  $ك$

$$ص = \frac{ك}{٣}, ع = \frac{٧ ك}{٣}$$

وعليه فإن مجموعة الحل هي  $ظ = (\frac{ك}{٣}, \frac{٧ ك}{٣}, ك) ; ك \geq ٠$

مثال (٥١-٢) على اعتبار أن

$$٠ = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ص \\ ع \end{bmatrix} = ١$$

الحل: من كون

$$\begin{bmatrix} ٦ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص + ٣ \\ ص + ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ص \\ ٢ص \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ٦ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص \\ ص \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١- \\ ٢ \end{bmatrix} ص$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} ٦ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص + ٣ + ص - ١ \\ ص + ٥ + ٢ص - ٢ \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ٦ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ص + ٢ \\ ٣ص + ٣ \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص \\ ص \end{bmatrix} \Leftrightarrow (٢, ٣)$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = ١.١.١$$

$$١.١.١.١.١ = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2-s \\ s-1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{bmatrix}$$

$$0 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - (s-1)(2-s) \Leftrightarrow 0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2-s \\ s-1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2-s \\ s-1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$0 = 2 - 2s + s + s - 2 \Leftrightarrow 0 = 3 - 2s$$

$$2s = 3 \Rightarrow s = \frac{3}{2}$$

أمثلة إضافية

مثال (٥٢-٢) = لدينا مصفوفة

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1- \\ 3 & 1- & 1 \end{vmatrix} = 1$$

أوجد قيمة العنصر  $a_{31}$  من  $a_{11}^{-1}$

الحل:

ليكن أي عنصر من  $a_{11}^{-1}$  هو  $a_{31}$  ومن العلاقة:

$$1 = (a_{11}^{-1})_{31} \cdot a_{13} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1- \\ 3 & 1- & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1- \\ 3 & 1- & 1 \end{vmatrix}$$

$$11 = \begin{vmatrix} 2 & 1- \\ 1- & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1- \\ 3 & 1- & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1- \\ 3 & 1- & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1- \\ 3 & 1- & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{11}{11} = 321$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2- \\ 3- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1- & 3 \\ 2 & 0- \end{bmatrix} \text{ إذا كان } 1 \text{ وكان } (1) \text{ من } \begin{bmatrix} 0 \\ 2- \\ 3- \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة م.

$$\text{الحل: } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \text{م} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{م} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5-6} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{م} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{مثال (٥٤-٢): إذا كان}$$

أوجد محدد هذه المصفوفة

الحل:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (2 \cdot 5 - 10) - (1 \cdot 25 - 10) = 0 - 15 = -15$$

$$\text{ومن المتطابقة } 2 \cdot 5 - 10 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 5 - 10 = 0 \Rightarrow 10 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 10 - 10 = 0 \Rightarrow 10 - 10 = 0 \Rightarrow 10 - 10 = 0$$

$$10 - 10 = 0 \Rightarrow 10 - 10 = 0 \Rightarrow 10 - 10 = 0$$

$$\Leftarrow \text{جنا (١٠+٥٠) = جتا ٦٠} = \frac{1}{2}$$

مثال (٢-٥٥): على اعتبار أن  $(1^{-1})^T + م = م$  و  $م \Leftarrow و - ((1^{-1})^T$

وان  $(1^{-1})^T + م = م$  و أ وجد المصفوفة م

الحل:

أ=  $\begin{bmatrix} 1^{-} & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  وعليه نجد أولا المصفوفة النظرية

$$\begin{bmatrix} \frac{1^{-}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (1^{-1})^T, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1^{-}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2^{-} \end{bmatrix}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2^{-} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1^{-} & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} \cdot 1$$

$$\begin{bmatrix} 2^{-} & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} \frac{1^{-}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1^{-}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (1^{-1})^T = م = و -$$

مثال (٢-٥٦): اذا كان  $\exists \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1^{-} \\ 0 & 12 & 4 \end{bmatrix} ك$

وكانت درجة المصفوفة ٢ اوجد قيمة ك التي لا تحقق هذه الدرجة:

الحل:

من المصفوفة أ نأخذ مصفوفات جزئية من الرتبة الثانية مثل:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} ك, \begin{bmatrix} 5 & 1^{-} \\ 0 & 4 \end{bmatrix} ك, \begin{bmatrix} 3 & 1^{-} \\ 12 & 4 \end{bmatrix} ك$$

ولكون:

$$٢٠ - ك - ٢٠ \neq ك \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ٥ & ١- \\ ك & ٤ \end{bmatrix} \Leftrightarrow ٠ = ١٢ - ١٢ = \begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ١٢- & ٤ \end{bmatrix}$$

### تمارين عامة (الاسئلة المقالية)

س١) على اعتبار أن ب - أ = -٤، ج - ب = ٢ أوجد محدد المصفوفة أ حيث:

$$\begin{vmatrix} ب & ١ & ١ \\ ١ & ب & ١ \\ ١ & ج & ١ \end{vmatrix} = |١|$$

س٢) على اعتبار أن أ. ب = ٧، أ = ١ وإذا كان  $\begin{bmatrix} ب & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، فأوجد قيمة  $|١ + ب|$

س٣) لدينا المصفوفة  $\begin{bmatrix} ١ & ٢-١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$  والاقتران ق (س) = س<sup>١</sup> + ١ فإذا كان درجة (١) = ١ أود صورة المصفوفة ق (١)

$$\left( \frac{\pi}{٧}, ٠ \right) \ni \text{س} \text{، } \begin{bmatrix} ١-ج \text{ من} & ١-ج \text{ من} \\ ١+ج \text{ من} & ج \text{ من} \end{bmatrix} = ١ \text{ (س ٤)}$$

أوجد قيمة س بالراديان الذي يجعل المصفوفة أ عندها ليس معكوس بالنسبة لعملية الضرب

$$\text{س ٥) أوجد مجموع جذور المعادلة } ١١ = \begin{vmatrix} ٥ & ١-س \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$$

س ٦) أوجد محدد

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & 5 \\ 9 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

س ٧) إذا كان  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$ ،  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$ ،  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  أوجد قيمة المحدد  $|\mathbf{A}(\mathbf{b})|$

س ٨) أوجد محدد المصفوفة

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{a} \\ \mathbf{c} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{vmatrix}$$

س ٩) أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{جاء} & \text{جاء} \\ 1 & \text{جاء} + 1 & \text{جاء} + 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

س ١٠) أوجد مجموع جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{a} + 2 \\ 2 & \mathbf{a} - 4 \end{vmatrix}$$

س ١١) أوجد قيم

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

س ١٢) إذا كانت

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد  $|\mathbf{A}^{-1}|$

س ١٣) إذا كان

$$\begin{vmatrix} 50 & 50 \\ 20 & 20 \end{vmatrix} = 2 + \frac{7}{2} \text{ أوجد قيمة } \mathbf{a}$$



س ١٤) إذا كان  $Y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

أوجد قيمة  $\begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 22 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

س ١٥) على اعتبار أن  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$  ك. (ب - ج): (ج - د).

أوجد قيمة ك

س ١٦) أوجد مجموع جذور المعادلة  $0 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

س ١٧) في محدد المصفوفة  $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$  إذا كان مرافق العنصر ٢٢ هو

العنصر ٤، ك دح، أوجد قيمة ك



### أسئلة موضوعية:

س (١) إن قيمة ك التي تجعل لنظام المعادلات التالية:

$$س + ص + ك = ٢$$

$$٣ س + ٤ ص + ٢ ع = ك$$

$$٢ س + ٣ ص - ع = ١$$

أكثر من حل هي

- (١) ٢ - (ب) ١ - (ج) ٠ (د) ٣ (هـ) ٤

س (٢) إذا كان  $\begin{vmatrix} ١ & ١-٢ & ١+٢ \\ ١ & ١-٥ & ١+٣ \\ ١ & ١- & ١ \end{vmatrix}$  فإن قيمة ١ هي:

- (١) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤ (هـ) ٥

س (٣) إن محدد المصفوفة  $A = \begin{vmatrix} ١ & \alpha ج + ١ & \alpha ج + ١ \\ ١ & \alpha ج + ١ & \alpha ج - ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$  هو

- (١) ١ - (ب) ٠ (ج) ١ (د) ج +  $\alpha$  (هـ) ج + ٢  $\alpha$

س (٤) حتى تكون مجموعة حل النظام  $س - ٤ ص = ١ + ١$

$٢ س + (١ + ٦) ص = ٣ + ١$  مجموعة خالية فإن قيمة أ هي

- (١) ٦ - (ب) ٤ - (ج) ٠ (د) ٢ (هـ) ٦



س٥) لدينا المصفوفات التالية  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ،  $C = \begin{bmatrix} 21 \\ 1+b \end{bmatrix}$  وإذا كان  $B = A - C$  فما قيمة  $b$  ؟

- (أ) - ٨ (ب) - ٦ (ج) - ١ (د) ٣ (هـ) ٥

س٦) ان مجموع جذور المعادلة  $\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$  هو

- (أ) - ٤ (ب) - ٢ (ج) ٠ (د) ٢ (هـ) ٤

س٧) في محدة المصفوفة  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$  كان مرافق العنصر  $a_{32}$ ،  $a_{11} = 4$ ،

فما قيمة  $k$  هي:

- (أ) - ٤ (ب) - ٢ (ج) ٠ (د) ٢ (هـ) ٤

س٨) اذا كان  $2x + 4 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  فما محدة  $A$  هي:

- (أ) - ٣ (ب) - ١ (ج) ١ (د) ٣ (هـ) ٥

س٩) ان حاصل ضرب المحدثين  $\begin{vmatrix} \frac{\pi}{12} & \frac{\pi}{12} \\ \frac{\pi}{12} & \frac{\pi}{12} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

- (أ) - ٢ (ب) - ٦ (ج) - ٦ (د) ٦ (هـ) ٦



س١٠) لدينا المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  فإن قيمة  $|A| - |A^{-1}|$  هي

- (أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٩، ٦ (د) ٨ (هـ) ٩، ٩

س١١) لدينا  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 29 & 13 \end{bmatrix}$  وكان  $A^{-1}B = C$ ، فإن  $B^{-1}C$  هو

- (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨ (هـ) ٩

س١٢) لدينا  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ،  $\Delta A^{-1}$  هي المصفوفة النظيرة فإن قيمة

$$|A| - |A^{-1}|$$
 يساوي

- (أ) ٠ (ب) ٤ (ج) ٩، ٦ (د) ٨ (هـ) ٩، ٩

س١٣) إذا كان  $C$  في  $(S)$   $\begin{vmatrix} (1+S-\frac{2}{3}) & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$  فإن قيمة  $C$  هي

- (أ) ٢ (ب) ١ (ج) ٠ (د) -١ (هـ) -٢

س١٤) لدينا  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  فإن القيم الحقيقية إذا كان  $|A - B|$  (ب)

$$S = 3$$
 هي

- (أ)  $\{-1, 2\}$  (ب)  $\{-3, 0\}$

- (ج)  $\{-1, 4\}$  (د)  $\{-1, 7\}$  (هـ)  $\{-2, 0\}$

$$\text{س ١٥} \quad \left| \begin{array}{cc} \text{جنا من} & \text{ظا من} \\ ١ - & \text{قنا من} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \text{ظا من} & ١ \\ \text{جنا من} & \text{قنا من} \end{array} \right|$$

١ (أ) (ب) جنا ٢ من (ج) جنا ٢ من (د) جنا ٢ من (هـ) جنا ٢ من

س ١٦) لدينا ٢ من + ص = ٢ فإن من. ص. ع هي:

$$\text{ع} - ٤ \text{ ص} = ٠$$

$$٤ \text{ من} + \text{ع} = ٦$$

$$\text{١} - ٢ \quad \text{ب} \left( \frac{١-}{٢} \right) \quad \text{ج} ٢ \quad \text{د} ٣ \quad \text{هـ} ٤$$

س ١٧) على اعتبار ان أ. ب. ج = ٢، ٢<sup>أ</sup> + ٢<sup>ب</sup> + ٢<sup>ج</sup> = ١٢ فإن:

$$\left| \begin{array}{cc} \text{ب} + \text{ج} & \text{أ} - \text{ب} \\ \text{أ} + \text{ج} & \text{ب} - \text{ج} \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{أ} - \text{ج} \end{array} \right|$$

$$\text{١} - ١٤ \quad \text{ب} - ٦ \quad \text{ج} ٠ \quad \text{د} ٦ \quad \text{هـ} ١٨$$

س ١٨) حتى يكون للنظام ٣ من (ك - ١) + ص = (ك + ١)، (ك + ١) + ص = ٣

$$\text{١} - ٣ \quad \text{ب} - ٢ \quad \text{ج} - ١ \quad \text{د} ١ \quad \text{هـ} ٢$$



**مفاهيم عامة في التوابع  
والاستمرار والاشتقاق**



## الفصل الثالث

### مفاهيم عامة في التوابيع والاستمرار والاشتقاق

تعريف: نقول عن التطبيق ق: د  $\Leftarrow$  ح انه تابع حقيقي معرف على المجموعة الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ونكتب ق (س) = ص.

تعريف: نقول عن س انه متحولا إذا أمكن إعطاءه قيما كيفية دون المساس بوضعه. ونقول عن س انه ثابت إذا كان إعطاءه قيما كيفية يؤثر في نوعه يتبين ذلك إذا لاحظنا أن س<sup>٢</sup> = ص حيث س هنا متحول يمكن إعطاءه قيما كيفية دون أن يتأثر وضعه كمتحول. أما على سبيل المثال س = ٢ فانه إذا أعطيناه قيمة أخرى فإن العلاقة سوف تنكسر صحتها وبالتالي فإن: س = ٢ هو ثابت.

إن هذا يقودنا إلى مفهومين أساسيين هما المعادلة والمطابقة.

تعريف: نقول عن ق (س) = جـ أنها معادلة إذا كانت صحيحة فقط من أجل قيم ثابتة وذات عدد منته لـ س. ونقول عن ل = ق (س) أنها مطابقة إذا كانت صحيحة من أجل أي س مهما كان س.

المتحول المستقل والمتحول التابع: نقول عن س في العلاقة ص = ق (س) انه متحولا مستقلا إذا كان تغييره يؤدي إلى تغير ص وعندها نقول أن ص متحولا تابعا لـ س.

مجموعة التعريف: هي مجموعة جزئية من منطلق التابع تشمل المنطلق الفعلي للتابع ق.

مجموعة المدى: هي مجموعة جزئية من مستقر التابع تمثل المستقر الفعلي للتابع ق.

### الخواص الجبرية للتوابع الحقيقية:

١- التابع المتباين: نقول عن ق انه تابعا متباينا إذا كان

$$\forall s, t, s \neq t \Rightarrow \exists s_1 \neq s_2 \text{ ق (س}_1\text{)} \neq \text{ق (س}_2\text{)}$$

وبالتالي فإن كل عنصر من المدى - المستقر الفعلي - سيكون صورة لعنصر واحد على الأكثر من مجموعة التعريف ما يجعلنا نقول انه إذا كان التابع متباينا فانه عند ذلك فقط يكون للمعادلة ق (س) = ص حلا وذلك باعتبار ص ثابتا معلوما وسيكون حلا واحدا على الأكثر

مثال:

$$\text{س}_2 = \text{ق (س)} \text{ بملاحظة أن هذا التابع غير متباين لأن ق (س}_2\text{)} = \text{ق (س}_2\text{)} = 4$$

وأيضاً بملاحظة انه محل المعادلة  $\text{س}_2 = \text{ص}$  نجد حلين مختلفين  $\text{س}_2 = \pm \sqrt{\text{ص}}$

وهذا منا

فص لتعريف التابع المتباين وبملاحظة التابع ق (س) =  $\text{س}_2$  فإن هذا التابع يمثل تابعا متباينا ذلك لأنه:

$$\forall s, t, s \neq t \Rightarrow \text{ح: س}_1 \neq \text{س}_2 \Rightarrow \text{ق (س}_1\text{)} \neq \text{ق (س}_2\text{)} \neq \text{ق (س}_2\text{)}$$

وأيضاً إذا أجرينا حلا للمعادلة  $\text{س}_3 = \text{ص}$  فإن  $\text{س}_3 = \sqrt[3]{\text{ص}}$  هو حل وحيد وبالتالي فإن ق (س) =  $\text{س}_3$  تابعا متباينا.

٢- التابع الغامر: نقول عن التابع  $ق$  انه تابعاً غامراً إذا كان:

$$\forall ص \exists ح المستقر: \therefore \times \ni \supseteq ح, ق (ص), ص$$

وبالتالي كل العناصر في المستقر يقابلها  $ص$  واحد على الأقل بحيث يكون  $ق (ص) = ص$  وهذا ما يجعلنا نؤكد وجود حلاً واحداً على الأقل للمعادلة  $ق (ص) = ص$  وذلك باعتبار  $ص$  ثابتاً معلوماً.

مثال:  $ق (ص) = ص^2 + 1$  إن هذا التابع ليس غامراً لأنه من أجل  $ص = صفر$  نجد أن المعادلة

$$ص^2 + 1 = صفر \text{ غير قابلة للحل في ح.}$$

أما من أجل التابع  $ق (ص) = ص^3 + 3$  فإن المعادلة  $ص = ص^3 + 3$  تملك حلاً ويعطي بالشكل  $ص = \sqrt[3]{ص-3}$  الأمر الذي يؤكد أن هذا التابع غامراً.

٣- التابع التقابل: نقول عن  $ق$  انه إذا كان  $ق$  متبائناً وغامراً وعندها سيكون للمعادلة  $ق (ص) = ص$

حلاً وحيداً باعتبار  $ص$  ثابتاً معلوماً.

### العمليات على التوابيع:

$$١- (ق+ع) (ص) = ق (ص) + ع (ص)$$

$$٢- (\alpha \cdot ق) (ص) = \alpha \cdot ق (ص)$$

$$٣- (ق \cdot ع) (ص) = ق (ص) \cdot ع (ص)$$

$$٤- (ق \div ع) (ص) = ق (ص) \div ع (ص)$$

## عملية التركيب التوابع:

بفرض لدينا التابع ق:  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ولدينا تابعا آخر ع:  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$   
عندئذ نعرف عملية تركيب التابعين ع. ق ونرمز لها بـ  $\mathbb{C} \circ \mathbb{D}$  بالشكل:

$$(\mathbb{C} \circ \mathbb{D})(\mathbb{D}) = \mathbb{C}(\mathbb{D}(\mathbb{D})) = \mathbb{C}(\mathbb{C})$$

مثال: إذا كان ق (س) = س<sup>2</sup> وع (س) = س + 3 عندئذ فإن:

$$(\mathbb{C} \circ \mathbb{D})(\mathbb{D}) = \mathbb{C}(\mathbb{D}(\mathbb{D})) = \mathbb{C}(\mathbb{C} + 3) = (\mathbb{C} + 3)^2$$

ملاحظة هامة ك أن عملية تركيب تابعين هي عملية ليست تبديلية في الحالة العامة.

تعريف التابع العكسي: بفرض لدينا ق تابعا حقيقيا عندئذ نعرف التابع العكسي لـ ق ونرمز له بـ  $\mathbb{C}^{-1}$  حيث  $(\mathbb{C}^{-1})^{-1} = \mathbb{C}$  لا تعبر عن الأس ز بالشكل:

$$\mathbb{C}^{-1} \circ \mathbb{C} = \mathbb{C} \circ \mathbb{C}^{-1} = \mathbb{D}$$

مثال ق (س) = س<sup>2</sup> نلاحظ أن  $\mathbb{C}^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{D}$  ونؤكد من انه:

$$\mathbb{C}^{-1} \circ \mathbb{C} = \mathbb{C} \circ \mathbb{C}^{-1} = \mathbb{D}$$

$$\mathbb{C}^{-1} \circ \mathbb{C} = \mathbb{C} \circ \mathbb{C}^{-1} = \mathbb{D}$$

ملاحظة هامة: يملك التابع ق تابعا عكسيا وحيدا إذا كان ق تقابلا.

تعريف التابع الزوجي: نقول عن ق انه تابعا زوجيا إذا كان ق (س) = ق (س)

تعريف التابع الفردي: نقول عن ق انه تابعا فرديا إذا كان ق (س) = -ق (س).

### التوابع المطردة:

تنقسم إلى نوعين أساسيين:

١. التابع المتزايد: نقول عن  $q$  انه تابعا متزايدا إذا كان

$$p_1 < p_2 \Rightarrow q(p_1) \leq q(p_2) \text{ في } (p_1) \geq q(p_2)$$

٢. التابع المتناقص: نقول عن  $q$  انه تابعا متناقصا إذا كان.

$$p_1 < p_2 \Rightarrow q(p_1) \geq q(p_2) \text{ في } (p_1) < q(p_2)$$

### التوابع المحدودة:

نقول عن التابع  $q$  انه إذا كان  $p \geq q$  في  $(p)$   $q \geq p$

### التوابع الدورية:

نقول عن التابع  $q$  انه دوري ودوره  $t$  إذا كان:

$$q(p) = q(p + t)$$

وحيث  $t$  هو أصغر عدد موجب يحقق العلاقة السابقة  $q + t \geq q$

مبرهنة ١-: إن أي تابع حقيقي  $q$  يمكن كتابته كمجموع لتابعين أحدهما زوجيا والآخر فرديا.

البرهان: بملاحظة أن  $q(p) = \frac{q(p) + q(-p)}{2} + \frac{q(p) - q(-p)}{2}$  ولنكتب  $q(p) = h(p) + g(p)$

$$h(p) = \frac{q(p) + q(-p)}{2} \text{ و } g(p) = \frac{q(p) - q(-p)}{2}$$

ومستلاحظ أن  $ج١ \Leftarrow ج١ (س) = ق \frac{ق(س) + ق(-س)}{٢} = -ج١ (س)$   
 زوجياً و  $ج٢ \Leftarrow ج٢ (س) = ق \frac{ق(س) + ق(-س)}{٢} = -ج٢ (س)$  فردياً  
 وإذا نظرنا إلى  $ق (س)$  نجد أن:  $ق (س) = ج١ (س) + ج٢ (س)$  ونمت  
 المبرهنة.

### قاعدة أساسية:

إن جداء تابعا زوجيا بتابع زوجي آخر يعطي تابعا زوجيا.  
 وجداء تابعا فرديا بتابع فردي آخر يعطي تابعا زوجيا.  
 وجداء تابعا زوجي بتابع فردي يعطي تابع فردي.  
 نتيجة هامة: إذا كان  $ق$  تابعا زوجيا فإن  $|ق|, \infty, ق, ق^٢$  كلا توابع  
 زوجية.  
 مبرهنة ٢-: إذا كان لدينا  $ق$  تابعا دوره  $١$  ولدينا تابعا دوريا أخرج دوره  
 $٢$  فإن:

$ق + ج$  تابع دوري دوره المضاعف المشترك الأصغر لـ  $١$  و  $٢$ .  
 $ق - ج$  تابع دوري دوره المضاعف المشترك الأصغر لـ  $١$  و  $٢$ .  
 مبرهنة ٢-: إذا كان  $ق, ج$  تابعين محددين فإن:  
 التوابع التالية تكون محدودة  $ق - ج, ق + ج, \alpha \cdot ق$

الآن سنورد التوابع الأساسية المعروفة حسب أشكالها الشهيرة:

١- التابع الصحيح من الدرجة (ن): نسمي التابع.

$$اُن(س) = اُن س^٥ + ا_١ س^{١-٥} + ..... + ا_١$$

بأنه تابع صحيح من الدرجة (ن) وتكون مجموعة تعريفه كلها.

$$٢- التابع الكسري: ويعطي بالصيغة ح(س) = \frac{اُن(س)}{ل(س)}$$

وذلك بفرض أن (س) تابعا صحيحا من الدرجة (ن)

و ل<sub>م</sub> م (س) تابعا صحيحا من الدرجة (م)

ويكون هذا التابع معرفا على ح ما عدا س التي تجعل المقام ل<sub>م</sub> م (س) = ٠

٣- التابع الأصم - الجذري: نقول عن التابع ل(س) =  $\sqrt[n]{ح(س)}$  أنه تابعا

جذريا حيث ج(س) ون؟ ط أما صحيحا أو كسريا. وتكون

مجموعة تعريف هذا التابع عندما ن زوجيا هي مجموعة التي يكون فيها

ج(س) > ٠ أما عندما تكون ن عددا فرديا فإن مجموعة تعريف هذا

التابع تصبح مجموعة تعريف التابع ج(س).

٤- التوابع المثلثية: إن من أهم التوابع المثلثية:

ج(س) = جتا س، ق(س) = جا س وهما معرفان على ح كلها ودوريان

$$ت = \pi$$

ق'(س) ظا س معرف على ح / {  $\pi + ٢$  } وهو دوري

$$\text{ودوره } ت = \pi$$

ق<sup>11</sup> (س) = ظلنا س معرف على ح / {ك} وهو دوري ودوره ت =  $\pi$ .

متطابقات وعلاقات شهيرة في التوابع المثلثية:

$$\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} = 1$$

$$\frac{1}{\text{جتا}^2 \text{س}} = 1 + \frac{1}{\text{جتا}^2 \text{س}} \quad \text{ظلنا}^2 \text{س} = 1 + \frac{1}{\text{جتا}^2 \text{س}}$$

٣- قوانين جميع الزوايا:

$$\text{جا}(\beta + \alpha) = \text{جا} \beta \cos \alpha + \text{جتا} \beta \sin \alpha$$

$$\text{جا}(\beta - \alpha) = \text{جا} \beta \cos \alpha - \text{جتا} \beta \sin \alpha$$

$$\text{جتا}(\beta + \alpha) = \text{جتا} \beta \cos \alpha - \text{جتا} \beta \sin \alpha$$

$$\text{جتا}(\beta - \alpha) = \text{جتا} \beta \cos \alpha + \text{جتا} \beta \sin \alpha$$

قوانين تحويل الجداء إلى جمع

$$\text{جا} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\text{جتا}(\beta + \alpha) + \text{جتا}(\beta - \alpha)]$$

$$\text{جتا} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\text{جتا}(\beta + \alpha) - \text{جتا}(\beta - \alpha)]$$

$$\text{جتا} \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\text{جتا}(\beta + \alpha) - \text{جتا}(\beta - \alpha)]$$

ملاحظة هامة:

$$1 - \text{جتا} \text{س} \geq 1 - \text{جتا} \text{س} \geq 1$$

التوابع العكسية للتوابع المثلثية:

نسمي التابع العكسي لـ جا س بـ ص = قوس جا س.

نسمي التابع العكسي لـ جتا س بـ ص = قوس جتا س.

نسمي التابع العكسي لـ ظا س بـ ص = قوس ظا س.

نسمي التابع العكسي لـ ظل س بـ ص = قوس ظل س.

التابع الأسّي: نعرف التابع الأسّي بأنه التابع من الشكل  $y = a^x$  (س) =  $a^x$  ذو الأساس

(١) حيث  $a > 0, a \neq 1$  ونقول عن التابع الأسّي انه تابع أسّي طبيعي إذا كان  $a = e$  حيث  $e$  هو العدد النيري

$$e = 2,718$$

ونكتب ق (س) =  $e^x$

ويكون هذا التابع معرف دوما على ح

التابع اللوغاريتمي: يكتب بالشكل ق (س) =  $\log_a s$  لو  $a$  س حيث أساسه هو  $a$  أما إذا كان أساسه هو العدد النيري  $e$  عندئذ نقول انه لوغاريتمياً طبعياً ويكتب ق (س) =  $\ln s$ .

ويكون هذا التابع معرفاً عندما يكون ما بداخله أكبر تماماً من الصفر.

متطابقات وعلامات شهيرة في التوابع المثلثية:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\tan^2 x}$$

٣. قوانين جميع الزوايا:

$$\text{جا } (\beta + \alpha) = \text{جا } \alpha \times \text{جتا } \beta + \text{جا } \beta \times \text{جتا } \alpha$$

$$\text{جا } (\beta - \alpha) = \text{جا } \alpha \times \text{جتا } \beta - \text{جا } \beta \times \text{جتا } \alpha$$

$$\text{جتا } (\beta + \alpha) = \text{جتا } \alpha \times \text{جتا } \beta - \text{جا } \alpha \times \text{جا } \beta$$

$$\text{جتا } (\beta - \alpha) = \text{جتا } \alpha \times \text{جتا } \beta + \text{جا } \alpha \times \text{جا } \beta$$

٤- قوانين تحويل الجداء إلى الجمع.

$$\text{جا } \alpha \times \text{جا } \beta = \frac{1}{2} [\text{جتا } (\beta + \alpha) + \text{جتا } (\beta - \alpha)]$$

$$\text{جتا } \alpha \times \text{جتا } \beta = \frac{1}{2} [\text{جتا } (\beta + \alpha) - \text{جتا } (\beta - \alpha)]$$

$$\text{جتا } \alpha \times \text{جا } \beta = \frac{1}{2} [\text{جتا } (\beta + \alpha) - \text{جتا } (\beta - \alpha)]$$

ملاحظة هامة:

$$1 - \text{جتا } \alpha \geq 1 - \text{جتا } \beta \geq 1 - \text{جتا } \gamma$$

التابع الأسّي: نعرف التابع الأسّي بأنه التابع من الشكل  $y = a^x$  (س) = أس ذو

الأساس  $a$  حيث  $a > 0$  و  $a \neq 1$

ونقول عن التابع الأسّي انه تابع أسّي طبيعي إذا كان  $a = e$  حيث  $e$  هو

العدد النيبيري  $e = 2.71828$  ونكتب  $y = e^x$  (س) =  $e^x$

ويكون هذا التابع معرف دوما على  $\mathbb{R}$

التابع اللوغاريتمي: يكتب بالشكل  $y = \log_a x$  (س) =  $\log_a x$  حيث أساسه هو  $a$  أما

إذا كان أساسه هو العدد النبري  $١ = هـ$  عندئذ نقول انه لوغاريتميا  
طبيعيا ويكتب ق (س) = لور ويكون هذا التابع معرفا عندما يكون ما  
بداخله أكبر تماما من الصفر

ملاحظة: إن التابع اللوغاريتمي هو التابع الأسّي للتابع الأسّي حيث:

$$\text{لور } ١ = س، \text{ لور } س = ١$$

خواص هامة للوغاريتم:

$$١. \text{ لور } ١ + \text{ لور } ب = \text{ لور } (١ \times ب)$$

$$٢. \text{ لور } ١ - \text{ لور } ب = \text{ لور } (١ \div ب)$$

$$٣. \text{ لور } ١ = ن \times \text{ لور } ١$$

$$٤. \text{ لور } ١ = \frac{١}{ن} \times \text{ لور } ١$$

$$٥. \text{ لور } هـ = ١$$

$$٦. \text{ لور } ١ = ٠$$

التوابع القطعية:

نعرف التوابع القطعية بناء على التوابع الأسية بالشكل:

$$١. \text{ جا (مقطعي) } = \frac{س-هـ}{٢} \text{ ويسمى الجيب المقطعي ويكون معرفا}$$

على ح كلها.

$$٢. \text{ جتا (مقطعي) } = \frac{س+هـ}{٢} \text{ ويسمى الجتا المقطعي ويكون معرفا}$$

على ح كلها.

٣. ظا (قطعي) =  $\frac{\text{جا (قطعي)}}{\text{جتا (قطعي)}}$  ويسمى الظل القطعي ويكون معرفا

على ح كلها.

٤. ظتا (قطعي) =  $\frac{\text{جتا (قطعي)}}{\text{جا (قطعي)}}$  ويسمى التظل القطعي ويكون معرفا  
على ح / [٠]. ذلك لأن

علاقات ومتطابقات شهيرة في التوابع القطعية:

$$١. \text{جا}^2 (\text{قطعي}) + \text{س}^2 (\text{قطعي}) = ١$$

$$٢. \text{ظا} (\text{قطعي}) = \frac{١}{\text{جتا} (\text{قطعي})}, \text{ظتا} (\text{قطعي}) = \frac{١}{\text{س} (\text{قطعي})}$$

$$\text{س} - ١ = \frac{١}{\text{جتا} (\text{قطعي})}$$

$$٣. \text{جا} (\text{قطعي}) + \text{جتا} (\text{قطعي}) = \text{هـ} \text{س}$$

٤- قوانين جميع الزوايا:

$$\text{جا} (\text{قطع}) + (\text{ب} + \text{ا}) = \text{جا} (\text{قطع}) + \text{جتا} (\text{قطع}) + \text{ب} + \text{جتا} (\text{قطع}) + \text{ا}.$$

$$\text{جا} (\text{قطع}) + \text{ب}.$$

$$\text{جا} (\text{قطع}) + (\text{ب} - \text{ا}) = \text{جا} (\text{قطع}) + \text{جتا} (\text{قطع}) - \text{ب} - \text{جتا} (\text{قطع}) - \text{ا}.$$

$$\text{جا} (\text{قطع}) + \text{ب}.$$

$$\text{جتا} (\text{قطع}) + (\text{ب} + \text{ا}) = \text{جتا} (\text{قطع}) + (\text{ا}) \text{جتا} (\text{قطع}) - \text{ب} - \text{جا} (\text{قطع})$$

$$\text{ا} \text{جا} (\text{قطع}) + \text{ب}.$$

جنا (قطع) (ب - ١) = جنا (قطع) ١ جنا (قطع) ب + جا (قطع) ١.  
جا (قطع) ب.

٥. قوانين تحويل الجداء إلى جمع:

$$١- جا (قطع) ١. جنا (قطع) ب = \frac{1}{4} [جا (قطع) (ب + ١) + جا (قطع) (ب - ١)]$$

$$٢- جا (قطع) ١. جنا (قطع) ب = \frac{1}{4} [جنا (قطع) (ب - ١) - جنا (قطع) (ب + ١)]$$

$$٣- جا (قطع) ١. جنا (قطع) ب = \frac{1}{4} [جنا (قطع) (ب + ١) - جنا (قطع) (ب - ١)]$$

التوابع العكسية للتوابع القطعية:

نسبتي التابع العكسي لـ جا (قطع) س بـ ص = قوس جا (قطع) س  
ويمكن استنتاجه بالعلاقة ص = قوس جا (قطع) س  $\Leftrightarrow$  س = جا (قطع) ص

$$\Leftrightarrow س = \frac{\sin^{-1} \sin \theta}{\theta}$$

$$\text{وبفرض } \theta = \sin^{-1} \sin \theta = \frac{\sin^{-1} \sin \theta}{\theta} \Leftrightarrow \sin^{-1} \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots$$

وبحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ ك نجد أن:

$$ك = \frac{\sin^{-1} \sin \theta \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{2} = \frac{\sin^{-1} \sin \theta \pm \cos \theta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \sin^{-1} \sin \theta \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \Leftrightarrow \theta = \sin^{-1} \sin \theta \pm \cos \theta$$

ويمكن بنفس الطريقة استنتاج أن:

$$\text{قوس جتا (قطع) س} = \text{لو} \cdot \{س \pm \sqrt{1-س^2}\}$$

$$\text{قوس ظا (قطع) س} = \frac{1}{س} - \left( \frac{س+1}{س-1} \right)$$

$$\text{قوس ظلنا (قطع) س} = \text{لو} \cdot \left( \frac{س+1}{س-1} + \frac{1}{س} \right)$$

وتعود دراسة مجموعة تعريف هذه التوابيع إلى توابيع أساسية سابقة

قاعدة هامة: إذا كان ق تابعاً معرفاً على المجموعة ح<sup>١</sup> و ه معرفاً على المجموعة

ح<sup>٢</sup> فإن التوابيع التالية:

$$\text{أ- ق} \pm \text{ه معرفاً على ح}^1 \cap \text{ح}^2$$

$$\text{ب- ق} \cdot \text{ه معرفاً على ح}^1 \cap \text{ح}^2$$

$$\text{ج- ق} \div \text{ه معرفاً على ح}^1 \cap \text{ح}^2 \quad \{ \text{ه} \neq 0 \}$$

$$\text{د- ق} \cdot \text{ه معرفاً على ح}^1 \cap \text{ح}^2$$

ملاحظات هامة على مجموعات التعريف:

١- إن الدراسة السابقة في مجموعات التعريف للتوابيع نستخدمها عندما

تكون أمام تابع ذو قاعدة ربط وحيدة مثل ق (س) = س<sup>٢</sup>، ه (س) =

جا س أو...

أما عندما تكون تابع معرف بالشكل:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq s \leq 5 \\ 2 + s \geq 0 \\ 1 + s \geq 0 \end{array} \right\} = \text{ق س}$$

فإننا لن ندرس في هذه الحالة مجموعة تعريفية كونها معطاة ضمناً في شكل التعريف.

### نهايات التتابع:

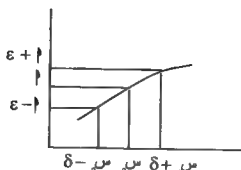
١- نهاية تابع عند عدد محدود: نلاحظ أنه في بعض التتابع لدى اقتراب س من عدد فإن قيمة التابع تقترب من قيمة معينة محدودة في هذه الحالة نقول أن التابع يملك نهاية محدودة عندما س تربية قريباً كافياً من س<sup>هـ</sup> ونكتب نهاس ← . ق (س) = أ حيث أ عدداً حقيقياً محدوداً وتعرف النهاية بالشكل: نقول أن نهاس ← . ق (س) = أ إذا كان

$$0 < \varepsilon < \delta \exists : 0 < \delta < \delta \leftarrow \text{ق (س)} - 1 \mid \varepsilon >$$

المعنى الهندسي لنهاية تابع: في الواقع إذا كانت س قريبة من س<sup>هـ</sup> قريباً كافياً وهذا ما نعبر عنه بـ  $|س - س^هـ| < \delta$  فإن س<sup>هـ</sup> -  $\delta < س < س^هـ + \delta$  وهذا ما يعبرنا عنه بـ  $|ق (س) - أ| < \varepsilon$  أي أن  $\varepsilon > ق (س) - أ > \varepsilon + 1$

ملاحظة هامة: نلاحظ أن تعريف النهاية للتابع عند س = س<sup>هـ</sup>

لا يشترط تعريف التابع على تلك النقطة



ولذلك نقول عن الرمز  $\leftarrow$  من  $\epsilon$  أن من تسعى إلى من  $\epsilon$  دون أن تساويها.

مثال: يفرض التابع  $q$  (س)  $\frac{1}{s}$  ولندرس نهايته عندما  $s \leftarrow 1$  الآن سنلاحظ الجدول.

$$1 = \frac{1}{s} \text{ نهايتها}$$

مثال: أوجد نهاية التابع  $q = \frac{1}{1+s^2}$  (س) عندما  $s \leftarrow 0$  سنلاحظ انه

$$1 = \frac{1}{1+s^2} \text{ نهايتها}$$

٢- نهاية تابع اللانهاية: نقول أن  $q$  (س) = ب

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta : |s| < \delta \leftarrow |q(s) - b| < \epsilon$$

وبالتالي اخترنا المقدار من كبيراً فإن  $|q(s) - b|$  سوف يكون صغيراً

مثال: أوجد نهاية التابع  $q$  (س)  $\frac{1+2s^2}{3+s^2}$  عند  $s \leftarrow \infty$

$$\begin{aligned} \text{نها} \leftarrow \infty \text{ ق (س)} = \text{نها} \leftarrow \infty \text{ ق (س)} = \frac{1+2\text{نها}}{2+2\text{نها}} = \frac{1+2\text{نها}}{2+2\text{نها}} \\ \text{نها} = \frac{1+2\text{نها}}{2+2\text{نها}} \Rightarrow \text{نها} = \frac{1+2\text{نها}}{2+2\text{نها}} \Rightarrow \text{نها} = \frac{1+2\text{نها}}{2+2\text{نها}} \end{aligned}$$

مثال: أثبت للتابع ق (س) = س نهاية عند أي نقطة س<sup>هـ</sup> وتساوي نها س<sup>هـ</sup> ← ∞  
ق (س) = س<sup>هـ</sup>

الآن بملاحظة أنه حتى يكون نها س<sup>هـ</sup> ← ∞ ق (س) = س<sup>هـ</sup>

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta (\varepsilon) : |س - س^هـ| < \delta \Rightarrow |ق(س) - س^هـ| < \varepsilon$$

$$\text{وبملاحظة المقدار } |ق(س) - س^هـ| < \varepsilon \Rightarrow |س - س^هـ| < \varepsilon$$

وبالتالي إذا اخترنا المقدار  $\delta (\varepsilon) = \varepsilon$  فإن التعريف محققاً وبالتالي: نها س<sup>هـ</sup> ← ∞ ق (س) = س<sup>هـ</sup>

ملاحظة هامة: في الواقع عند تطبيق نهاية تابع عند نقطة س<sup>هـ</sup> ← ∞ تعريفاً يجب أن نبحث عن علاقة  $\delta = \delta (\varepsilon)$  فإذا كانت موجودة تحقق التعريف وإلا فإن التعريف غير محقق.

تعريف النهاية من اليمين: نقول عن التابع ق أنه يملك نهاية عن اليمين مساوية للعدد أ ونكتب نها س<sup>هـ</sup> ← ∞ ق (س) = أ إذا كان  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta (\varepsilon) : س - س^هـ > \delta \Rightarrow |ق(س) - أ| < \varepsilon$

ونسمي هذه النهاية نهاية التابع ق عند النقطة س<sup>هـ</sup> عندما تسعى س إلى س<sup>هـ</sup> بقيم أكبر منها أي أن  
س ∈ [س<sup>هـ</sup>، س<sup>هـ</sup> + δ]

مثال: أوجد النهاية من اليمين للتابع المعروف بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{if } x \leq 2 \\ 3+x & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

وذلك عند النقطة  $x = 2$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (1+x) = 1+2 = 3$$

تعريف النهاية من اليسار: نقول عن التابع  $f$  أنه يملك نهاية من اليسار مساوية للعدد  $b$  إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : (x \in (2-\delta, 2)) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ونسمي هذه النهاية نهاية التابع  $f$  عند النقطة  $x = 2$  عندما تسعة  $x$  إلى  $2$  بقيم أصغر منها أي أن  $x \in (2-\delta, 2)$

مثال: أوجد نهاية التابع المعروف من المثال السابق عند النقطة  $x = 2$  من اليسار

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (1+x) = 1+2 = 3$$

ملاحظة هامة: تكون نهاية تابع ما  $f$  موجودة عند  $x = a$  إذا كانت نهايته من اليمين موجودة ونهايته من اليسار موجودة ومتساويتان.

أي أن:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$٢ - \text{نها ق (س)} = \text{ب}$$

$$٣ - \text{نها ق (س)} = \text{ب}$$

ونقول عن التابع ق أنه لا يملك نهاية عند س ← س.ه إذا لم يتحقق إحدى الشروط السابقة أو كانت

نها س ← س.ه ق (س) = ∞ وعندها أيضاً نقول أن التابع متباعداً عند س ← س.ه .

مثال: أوجد نهاية التابع ق (س) =  $\frac{٢}{٤ - س}$    
 الحل:

بملاحظة أن هذا التابع معرفاً على المجموعة  $[-\infty, -٢]$

$[٢, \infty]$  عندئذ يمكن أخذ نهاية هذا التابع عند س ← ٢ من اليمين فقط ونكتب نها  $\frac{٢}{٤ - س} = ٠$

تعريف نهاية التابع اعتماداً على المتتاليات:

نقول أن ق (س) يملك نهاية عندما س ← س.ه ومساوية للعدد أ ونكتب نها س ← س.ه ق (س) = أ إذا كانت كل متتالية  $\{٢_n\}$  متقاربة نحو العدد س.ه ستعطينا متتالية جديدة هي  $\{ق(٢_n)\}$  حيث نها س ← س.ه ق (س) = أ

ملاحظة: نستفيد من التعريف السابق للنهائية في إثبات عدم وجود نهاية أكثر منه في إثبات وجودها ذلك أنه إذا وجدنا متتالية  $٢_n$  ← س.ه بحيث أن ق

(١٠) فلذلك يجوز لنا بأن التابع ليس له نهاية عند س.ه.

تعريف النهاية من اليمين اعتماداً على المتتاليات:

نقول أن التابع ق (س) يملك نهاية عند س ← س.ه من اليمين ونكتب نها (س) إذا كانت متتالية متاقصة {أ<sub>ن</sub>} تسعى إلى العدد س ← س.ه، تعطي أن نها ق (أ<sub>ن</sub>) حيث ق (أ<sub>ن</sub>) { متتالية .

تعريف النهاية من اليسار اعتماداً على المتتاليات:

نقول ف أن التابع ق (س) يملك نهاية عندما س ← س.ه من اليسار ونكتب نها (س) = ب إذا كانت متتالية متزايدة {أ<sub>ن</sub>} تسعى إلى العدد س.ه: أ<sub>ن</sub> ← س.ه، س.ه تعطي أن نها ← ق (أ<sub>ن</sub>) = ب حيث ق (أ<sub>ن</sub>) { متتالية.

تعطي نها ← ق (أ<sub>ن</sub>) = ب حيث ق (أ<sub>ن</sub>) { متتالية.

مثال: برهن عدم وجود نهاية للتابع ق (س) = جاس عند س ← ∞

الحل: الآن باختيار أ<sub>ن</sub> = ن Π وملاحظة أن نها ← ∞ = أ<sub>ن</sub> = ∞ وتشكيل المتتالية:

نها ← ∞ ق (أ<sub>ن</sub>) = نها ← ∞ جاس = نها ← ∞ = ∞

وباختيار أيضاً ب<sub>ن</sub> = π وملاحظة أن نها ← ∞ = ب<sub>ن</sub> = ∞ وتشكيل

المتتالية:

$$\text{نها ق (} \uparrow \downarrow \text{)} = \text{نها جا ن } \pi = \text{نها } 0 = 0$$

وباختيار أيضاً ن =  $\frac{\pi}{4}$  وملاحظة ان نها ب ن =  $\infty$  المتتالية:

$$\text{نها ق (ب ن)} = \text{نها جا } \frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = \text{نها } (1 - \frac{1}{4})$$

والنهاية الأخيرة غير موجودة.

عندئذ فإن التابع ق (س) = جا س لا يملك نهاية عند س ←  $\infty$

### خواص النهايات:

إذا كان لدينا نها س ← س ق (س) =  $\uparrow$  و نها س ← س ه (س) = ب  
عندئذ فإن

$$1 - \text{نها ق } \pm \text{ ه (س)} = \text{نها ق } \pm \text{ نها ه (س)}$$

$$2 - \text{نها ق. ه (س)} = \text{نها ق (س)} \times \text{نها ه (س)}$$

$$3 - \text{نها ق (س)} = \frac{\text{نها ق (س)}}{\text{نها ه (س)}}$$

$$4 - \text{نها [ق (س)]} = \pm \text{نها [ق (س)]}$$

$$5 - \text{نها } \alpha. \text{ نها ق (س)} = \alpha \text{ نها ق (س)}$$

البرهان: إذا كانت نها ق (س) =  $\uparrow$  فإنه من أجل أي متتالية  $\uparrow$  ← س فإن  
نها نها ه (س) = ب وأيضاً نها ق (س) =  $\uparrow$  فإنه من أجل أي  
متتالية  $\uparrow$  ← س فإن نها ه (س) = ب وبالتالي وفق هذه المناقشة

تنتقل إلى خواص النهايات الخاصة بالمتتاليات العددية والمذكورة في الفصل

الأول من وبالتالي نها  $\leftarrow \infty$  (ق  $\mp$  هـ) = نها  $(\uparrow \downarrow)$  نها  $\mp$  نها هـ

( $\uparrow \downarrow$ ) حسب تعريف النهاية السابق.

وينفس الطريقة يمكن برهان على أن الخواص ٢-٣-٤-٥ صحيحة الأمر

الذي نتركه للقارئ.

تمارين على النهايات:

$$١- \text{ ق (س) } = \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٣ + \text{س}} \text{ عندما } \text{س} \leftarrow ٢ \text{ و } \text{س} \leftarrow ٠ \text{ و } \text{س} \leftarrow \infty$$

$$٢- \text{ ق (س) } = \frac{\sqrt{٢ - \text{س}}}{٢ + \sqrt{\text{س}}} \text{ عندما } \text{س} \leftarrow \infty \text{ و } \text{س} \leftarrow ٠$$

$$٣- \text{ ق (س) } = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢}{٢ + \text{س}} & \text{عندما } \text{س} > ١ \\ \frac{\text{س}}{٢ + \text{س}} & \text{عندما } \text{س} \leq ١ \end{cases}$$

الحل:

$$١- \text{ نها } \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٣ + \text{س}} = \frac{(٢)^٣ - ٨}{(٢)^٣ + ٢} = \frac{٨ - ٨}{٨ + ٢} = \frac{٠}{١٠} = ٠$$

$$\frac{٠}{٠} = \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٣ + \text{س}} \text{ نها } \text{س} \leftarrow ٠$$

أيضاً هذه الحالة عدم تعيين يلزم إزالتها.

$$\text{نها } \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٣ + \text{س}} = \text{نها } \frac{[٨ - \text{س}^٣]}{[٣ + \text{س}]} = \text{نها } \frac{٨ - \text{س}^٣}{٣ + \text{س}} = \frac{٨ - ٨}{٣ + ٢} = \frac{٠}{٥} = ٠$$

٢- ملاحظة أن نها  $\frac{\infty}{\infty} = \frac{2-}{2+}$  وهي حالة عدم تعيين يلزم إزالتها.

$$\begin{aligned} \text{نها} &= \frac{\frac{2-}{2+}}{\frac{2-}{2+}} = \frac{2-}{2+} \times \frac{2+}{2-} = \frac{2-}{2+} \times \frac{2+}{2-} = 1 \\ \text{نها} &= \frac{\frac{2-}{2+}}{\frac{2-}{2+}} = \frac{2-}{2+} \times \frac{2+}{2-} = \frac{2-}{2+} \times \frac{2+}{2-} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{نها} = \frac{\frac{2-}{2+}}{\frac{2-}{2+}} = \frac{2-}{2+} \times \frac{2+}{2-} = \frac{2-}{2+} \times \frac{2+}{2-} = 1$$

$$\text{الآن من أجل نها} = \frac{2-}{2+} = \frac{2-}{2+} = \frac{2-}{2+}$$

الآن لحساب النهاية نها  $\leftarrow 1$  ق (س)

سنلاحظ أن هذا التابع معرفاً قبل س = 1 بشكل وبعد س = 1 بشكل آخر لذلك لابد من حساب النهاية من اليمين ومن اليسار لهذا التابع.

٣- الآن لحساب النهاية من  $\leftarrow 1$  ق (س).

سنلاحظ أن هذا التابع معرفاً قبل س = 1 بشكل وبعد س = 1 بشكل آخر لذلك لابد من حساب النهاية من اليمين ومن اليسار لهذا التابع.

$$\text{نها ق (س)} = \frac{2-}{2+} = 3, \quad \text{نها ق (س)} = \frac{2-}{2+} = 1$$

وملاحظة أن نها  $\neq$  نها وبالتالي فإن هذا التابع لا يملك نهاية عند س = 1

مثال: ادرس النهاية نها  $\leftarrow 1$  | س + 1 | واحسب قيمتها.



### الفصل الثالث

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq s \\ 1 \geq s \end{array} \right\} = |1 + s|$$

ولدراسة هذه النهاية لا بد من دراستها من اليسار واليمين كون  $s = 1$  نقطة تغيير تعريف لهذا التابع إذن أولاً: نها  $|1 + s| = 1 + s$  نها  $s = 1$

$$\text{ثانياً: نها } |1 + s| = 1 - s \text{ نها } s = 1 \text{ وبالتالى نها } |1 + s| = 1 + s \text{ نها } s = 1$$

وهذا يؤدي إلى أن نها  $|1 + s| = 1$

### الاستمرار والاتصال:

تعريف: نقول عن التابع  $f$  أنه مستمر - متصل عن ج نقطة مثل  $s = 1$  إذا كان  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta : \delta (s) : 0 < |s - 1| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(1)| < \epsilon$

ومعنى التعريف أنه باقتران قيمة  $s$  من  $s = 1$  قريباً كافياً فإن التابع سيقترب من قيمته عند  $s = 1$  وهذه تعني تعريفاً أن نها  $s \leftarrow s = 1$  ق (س) = 1.

إن هذا التعريف يعطينا وفقاً لشروط وجود النهاية ثلاثة شروط للاستمرار هي:

١- أن يكون للتابع  $f$  (س) نهاية من اليمين عند  $s = 1$  ونهاية من اليسار عند  $s = 1$ .



أي إن نها ق(س)، نها = ق(س) موجودتان ومحدودتان.

٢- أن تكون النهايتان السابقتان متساويتان

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

٣- أن تكون نهاية التابع نها ق=ق(س) مساوية لقيمة التابع عند س. أي

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

مثال: برهن أن التابع ق(س) مستمر عند النقطة س = ١

الحل: بملاحظة ق(١) = ١ عندئذ بكتابة الشرط:  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$|f(x) - 1| < \epsilon \quad \text{whenever} \quad |x - 1| < \delta$$

$$|x^2 - 1| < \epsilon \quad \text{whenever} \quad |x - 1| < \delta$$

$$|x^2 - 1| = |x - 1| |x + 1| < \epsilon$$

$$|x - 1| < \delta \quad \text{whenever} \quad |x - 1| < \delta$$

والآن باختيار  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$  يكون تعريف الاستمرار محققاً و ق(س) = س مستمر عند س = ١.

الاستمرار على مجال: نقول أن ق تابعاً مستمراً على مجال [أ، ب] إذا كان مستمراً على كل نقطة من هذا المجال.

لقد عرفنا فيما سبق النهاية من اليمين والنهاية من اليسار. نستطيع الآن تعريف الاستمرار من اليمين ومن اليسار بناءً على ذلك بالشكل:

١- الاستمرار من اليمين: نقول أن  $q$  تابعاً مستمراً على  $s$  من اليمين إذا كانت نهايته - أي التابع - من اليمين موجودة ومساوية لقيمة التابع عند  $s$ . أي أن:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \delta < \varepsilon \text{ . } s - s_0 > \delta \Rightarrow |q(s) - q(s_0)| < \varepsilon$$

ونكتب الشرط نها  $q$  (س) =  $q(s_0)$

٢- الاستمرار من اليسار: نقول أن  $q$  تابعاً مستمراً من اليسار إذا كانت نهايته - أي التابع - من اليسار موجودة ومساوية لقيمة التابع عند  $s$ . أي أنه  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \delta < \varepsilon \text{ . } s - s_0 > \delta \Rightarrow |q(s) - q(s_0)| < \varepsilon$

نورد أخيراً شرط استمرار التابع بناءً على مفهومي الاستمرار من اليمين والاستمرار من اليسار ونقول إن الشرط اللازم والكافي ليكون  $q$  مستمراً عند  $s_0$  هو أن يكون مستمراً من اليمين ومن اليسار.

تعريف: نقول أن النقطة  $s_0$  نقطة انقطاع للتابع  $q$  إذا كان  $q$  غير مستمراً عند  $s_0$ .

تجديد وملاحظة: بملاحظة شروط الاستمرار رقم فإننا يمكن أن نصنف نقاط الانقطاع وفق نوعين أساسيين:

١- نقطة الانقطاع من النوع الأول: هي النقطة التي يكون عدم استمرار التابع عندها ناتجاً من الإخلال بالشرط الثالث. أي أنه توجد للتابع  $q$

وتسمى هذه النقطة "نقطة انقطاع قابلة للإزالة" وذلك لأنه بسهولة يمكن إعادة تعريف  $q$  على  $s$  بحيث يكون نهائياً  $s \leftarrow s$  في (س) في (س) وتصبح عندئذ  $s$  نقطة استمرار وليست نقطة انقطاع.

$$\left. \begin{array}{l} 1 > \text{میں} \\ 1 = \text{میں} \\ 1 < \text{میں} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + \text{میں} \\ 4 \\ 2 - \text{میں} \end{array} = (\text{میں})$$

من اليسار  $\text{نها} \text{ق(م)} = \text{نها} 2 + 1 = 3$

من اليمين     $\text{نها} \leftarrow \text{ق(س)} = \text{نها} + \text{س} = 3$      $\text{س} \leftarrow 1$

مما سبق نجد أن  $\text{نها} \text{ق}(\text{م}) = \text{نها} \text{ق}(\text{م}) = \text{نها} \text{ق}(\text{م}) = 3$

لكن نجد أن نها ق (س) = نها ق (س) = نها ق (س) = ٣

لكن نجد أن نها ق (مس) = ٣ ≠ ٤ ق (١)



$$\left. \begin{array}{l} 1 > s \\ 1 = s \\ 1 < s \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + 2s \\ 4 \\ 2 - s \end{array} = (s) \text{ ق}$$

نجد أن مستمر عند  $s = 1$

٢- نقطة الانقطاع من النوع الثاني غير قابلة للإزالة.

نقول أن  $s$  هي نقطة انقطاع من النوع الثاني إذا كان عدم استمرار التابع عندها يتبع من الإخلال بالشرط الأول أو الثاني أي أنه إما إحدى النهايات من اليمين أو من اليسار غير موجودة.

أو أن كلاهما موجودتان ولكن غير متساويتان.

$$\text{مثال: } (s) \text{ ق} = \left. \begin{array}{l} 1 + 2s \\ 2 - s \end{array} \right\} \begin{array}{l} s \leq 2 \\ s > 2 \end{array} \text{ ادرس استمرار ق عند } s = 2$$

$$\text{الحل: بملاحظة أن نها ق (س) = نها } \frac{1+2s}{2-s} = \frac{1+2 \times 2}{2-2} = \frac{5}{0}$$

$$\text{أيضاً لدينا نها } \frac{1+2s}{2-s} = \frac{5}{0} = 11 = 5 + 2 \times 3 = 5 + s \times 3$$

نجد أن نها ق (س)  $\neq$  نها ق (س) بالتالي  $s = 2$  نقطع انقطاع من النوع الثاني غير قابلة للإزالة

خواص الاستمرار:

إذا كان ق، ه تابعان مستمران فإن:

$$1- \text{ق} + \text{ه} \quad 2- \text{ق} - \text{ه} \quad 3- \text{ق} \cdot \text{ه}$$



٤- ق ÷ هـ : هـ ≠ ٠ كلها توابع مستمرة

٧-  $\alpha$  ق

٦- ق ٢

٥- |ق|

إن برهان هذه الخواص ينتج مباشرة من كتابه شرط الاستمرار والمبرهنة (خواص النهايات)

ملاحظة هامة: إن تركيب تابعين مستمرين هو تابع مستمر.

مبرهنة: إذا كان ق تابعاً مستمراً على [ ا، ب ] فإن ق يأخذ جميع القيم على هذا المجال ومعنى أوضح سيعطي ق صور جميع العناصر الموجودة في المجال [ ا، ب ].

أي أنه من أجل ص من الصورة المباشرة لـ [ ا، ب ] تضمن وجود س بحيث ق (س) = ص.

نتيجة: إذا كان ق مستمراً على مجال [ ا، ب ] بحيث ا، ب من إشارتين مختلفتين فإنه يوجد جـ  $\in$  [ ا، ب ] بحيث ق (جـ) = ٠ وهذه النتيجة لها تطبيقات مختلفة في حل معادلات جبرية.

مجموعة استمرار التابع: نقول عن مجموعة جميع نقاط الاستمرار للتابع ق بأنها مجموعة استمرار التابع.

ومن ملاحظة أنه حتى يكون التابع مستمراً يجب أن يكون معروفاً عند تلك النقطة وهذا ينتج من الشرط الثالث من شروط الاستمرار وبالتالي فإن مجموعة الاستمرار هي مجموعة جزئية من مجموعة التعريف.

مفهوم الاستمرار القطعي على مجال: نقول أن  $ق$  مستمراً قطعياً أو 'تقطعياً' على مجال  $[١, ٢]$  إذا كان مستمراً على كامل المجال ما عدا عدداً متتهياً من النقاط مثل  $س١, س٢, ..... سن$  وعندها يمكن كتابة الشكل  $[١, ٢] = [١, س١] \cup [س١, س٢] \cup ..... \cup [سن, ٢]$

حيث التابع  $ق$  مستمراً على كل مجال  $[س١, س٢], [س٢, س٣], ..... [سن, ٢]$  ولهذا السبب نسميه استمراراً قطعياً أي أنه مستمر على مجالات متقطعة.

استخدام مفهوم الاستمرار في حساب النهايات: إذا كان التابع  $ق$  مستمر على نقطة فإن نهايته  $ق(س) = ق(س٠)$  بالتالي يكفي لحساب نهاية تابع مستمر عند نقطة  $س٠$  بالتابع.

### الاشتقاق والتفاضل

تعريف: إذا كان لدينا التابع  $ق$  المستمر عند النقطة عندئذ سوف نعرف المشتق الأول لهذا التابع ونرمزه  $ق'(س)$  أو  $\frac{دق}{دس}$  ونكتب

$$ق'(س) = \lim_{س \rightarrow س٠} \frac{ق(س) - ق(س٠)}{س - س٠}$$

حيث  $ق'(س٠)$  هو قيمة المشتق الأول للتابع  $ق$  عند النقطة  $س٠$  وهو المقدار العددي أما لإيجاد قاعدة عامة لـ  $ق'(س٠)$  فإننا سنضع بدلاً من  $(س٠)$  الثابت. المتحول  $(س)$  وعندها تصبح.

$$ق'(س) = \lim_{س \rightarrow س٠} \frac{ق(س) - ق(س٠)}{س - س٠}$$

مناقشة عامة: لقد برز مفهوم المشتق في القرن السابع عشر على يد الرياضي الكبير إسحاق نيوتن وقد دعت الحاجة عندئذ إلى حساب ما يسمى السرعة اللحظية للجسم حيث كانت عندئذ معروفة لديهم فقط السرعة الوسطى وهذه تعرف بأنه نسبة التغير في المسافة على التغير في الزمن أي  $c = \frac{\Delta q}{\Delta z}$  ولكن أحداً عندها لم يكن قادراً على معرفة سرعة الجسم في لحظة واحدة وليس في مجال زمني لذلك فكر نيوتن بإنهاء التغير في الزمن  $\Delta z$  إلى الصفر فكرته لاقت في بادئ الأمر معارضة شديدة حيث من المعلوم أن القسمة على صفر غير معرفة لكنه رغم ذلك أثبت أن هذه النهاية يمكن حسابها وأخيراً وصل إلى مفهوم وقاعدة المشتق الأول.

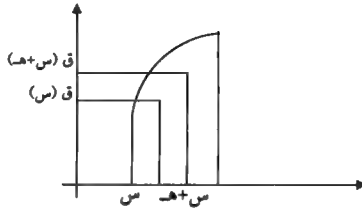
$$q'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{q(s + \Delta s) - q(s)}{\Delta s}$$

$$\text{والتي يمكن اعتماد الصيغة فيها } q'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(s + h) - q(s)}{h}$$

وهو الدستور المذكور أعلاه.

المعنى الهندسي للمشتق:

بملاحظة الشكل: لدينا النقطتين  $s$ ،  $s + h$  و التابع  $q$  المعروف على المجال وبملاحظة أن النقطتين  $(s, q(s))$  و  $(s + h, q(s + h))$  يعينان مستقيماً يمكن حساب ميله بالشكل:



$$م = \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{س+هـ - س} = \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$$

والآن يجعل هـ  $\leftarrow 0$  فإن النقطة س + هـ ستسعى إلى س وستقرب منها قريباً كافياً حتى نصل إلى أن المستقيم بينهما سيصبح مماساً للتابع عند س. وبالتالي م سيصبح عندها معبراً عن ميل المماس عند تلك النقطة.

التفاضل العام:

إذا أمكن كتابة التغير بالتابع ق بالشكل:

ق (س+هـ) - ق (س) = أ. هـ +  $\mu$  (هـ) حيث أ عدداً محدوداً و  $\mu$  (هـ) تابعاً لـ هـ بحيث أن  $\mu$  (هـ)  $\leftarrow 0$  عندئذ يمكن القول بأن ق قابلاً للتفاضل وفق س ونكتب

ق = ق (س+هـ) - ق (س) = أ. هـ +  $\mu$  (هـ) و أ تصبح هي المشتق الأول عند س.

وملاحظة عميد: نلاحظ أن تعريف المشتق اعتمد أساساً على مفهوم النهايات لذلك فإنه يمكن تقسيم المشتق إلى نوعين أساسين هما:

١- المشتق اليميني: نقول أن  $q$  قابلاً للاشتقاق من اليمين عند  $s$  إذا كان المقدار 
$$q(s) - q(s-h) = o(h)$$

يملك نهاية من اليمين عندما  $h \rightarrow 0$  ونكتب:  $q'_s(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(s) - q(s-h)}{h}$

٢- المشتق من اليسار: نقول أن  $q$  قابلاً للاشتقاق من اليسار عند  $s$  إذا كان المقدار 
$$q(s) - q(s+h) = o(h)$$

يملك نهاية من اليسار عندما  $h \rightarrow 0$  ونكتب: يسار  $q'_s(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(s) - q(s+h)}{h}$

وأخيراً يكون الشرط اللازم والكافي لوجود مشتق للتابع  $q$  هو موجود مشتق من اليمين التابع ومشتق يسار وأن يكونا متساويان أي أن  $q'_s = q'_s$

خواص الاشتقاق: إذا كان  $q$  قابلاً للاشتقاق عند  $s$  فإن

١-  $q + k$  قابل للاشتقاق و  $(q + k)' = q' + k'$

البرهان: بملاحظة المقدار 
$$(q + k)(s) - (q + k)(s-h) = q(s) - q(s-h) + k(s) - k(s-h)$$

$$= \frac{q(s) - q(s-h)}{h} + \frac{k(s) - k(s-h)}{h} = \frac{q(s) - q(s-h)}{h} + k'(s)$$

والآن بأخذ نهاية طرفي العلاقة عندما  $h \rightarrow 0$  نجد أن

$$(q + k)'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q + k(s+h) - q - k(s)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(s+h) - q(s)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(s+h) - k(s)}{h} = q'(s) + k'(s)$$

٢- سنتناقش نفس المناقشة بالنسبة  $(q - k)$   $(s) = q'(s) - k'(s)$

٣- أن  $q \cdot k$  قابل للاشتقاق و  $[q \cdot k]' = q' \cdot k + q \cdot k'$

البرهان: بملاحظة أن:

$$(q \cdot k)(s+h) = q(s+h) \cdot k(s+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(s+h) \cdot k(s+h) - q(s) \cdot k(s)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(s+h) \cdot k(s+h) - q(s) \cdot k(s)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{q(s+h) \cdot k(s+h) - q(s) \cdot k(s)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{q(s+h) \cdot k(s+h) - q(s) \cdot k(s)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{q(s+h) \cdot k(s+h) - q(s) \cdot k(s)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{q(s+h) \cdot k(s+h) - q(s) \cdot k(s)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{q(s+h) \cdot k(s+h) - q(s) \cdot k(s)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{q(s+h) \cdot k(s+h) - q(s) \cdot k(s)}{h} \right]$$

$$٤- \text{إن } \frac{q}{k} \text{ قابل للاشتقاق و } \left( \frac{q}{k} \right)' = \frac{q' \cdot k - q \cdot k'}{k^2}$$

$$\left( \frac{q}{k} \right)'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{q(s+h)}{k(s+h)} - \frac{q(s)}{k(s)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{q(s+h) \cdot k(s) - q(s) \cdot k(s+h)}{k(s+h) \cdot k(s)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(s+h) \cdot k(s) - q(s) \cdot k(s+h)}{h \cdot k(s) \cdot k(s+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(s+h) \cdot k(s) - q(s) \cdot k(s+h)}{h \cdot k(s) \cdot k(s+h)}$$

$$= \text{نها} \cdot \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} \cdot \left[ \text{نها} \cdot \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} \right]$$

$$= \text{نها} \cdot \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} \cdot \left[ \text{نها} \cdot \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} \right]$$

$$= \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} \cdot \left[ \text{ق} \cdot \text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه}) - \text{ق} \cdot \text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه}) \right] \cdot \left[ \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} \right]$$

$$\leftarrow \left( \frac{\text{ق}}{\text{ك}} \right)^2 = \frac{\text{ق} \cdot \text{ق} \cdot \text{ك} \cdot \text{ك}}{\text{ك}^2}$$

سنبدأ الآن بحساب المشتق للتتابع الأساسية:

أولاً: التابع الثابت: ويعرف بالشكل  $\text{ق}(\text{س}) = 1$  حيث  $1 \in \mathbb{C}$  نلاحظ أن:

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{نها} \cdot \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} = \frac{1 - 1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} = 0$$

ثانياً: التابع الصحيح: من الشكل  $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^0$  ق نلاحظ أن:

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{نها} \cdot \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} = \frac{1 - 1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} = 0$$

$$= \text{نها} \cdot \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} = \frac{1 - 1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} = 0$$

$$= \text{نها} \cdot \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} - \frac{1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} = \frac{1 - 1}{\text{ك} \cdot (\text{س} + \text{ه})} = 0$$

مجموعة هذه الحدود متحوي ه  $\leftarrow (\text{س}^0) = \text{س}^0$

ملاحظة: إن المناقشة السابقة والقاعدة يصحان من أجل ن د ك

ثالثاً: التوابع المثلثية

١- بالنسبة لـ ق (س) = جاس نلاحظ أن:

$$ق'(س) = \frac{نها}{هـ} = \frac{جاس - (س + هـ)}{هـ} = \frac{جاس - جتاه + جا هـ}{هـ}$$

$$= \frac{نها}{هـ} - \frac{جتاه}{هـ} + \frac{جا هـ}{هـ} = \frac{نها}{هـ} - جتاس + جاس$$

وملاحظة أن:

$$\frac{نها}{هـ} = 1, \quad \frac{جتاه}{هـ} = 0$$

$$\text{لنجد أن: } ق'(س) = \frac{نها}{هـ} - \frac{جتاه}{هـ} + \frac{جا هـ}{هـ} = 1 - جتاس + جاس$$

$$= (جاس) + 1 - جتاس$$

٢- بطريقة مشابهة تماماً لما سبق ثبت أن (جتاس) = - جاس

٣- من أجل ق (س) = ظاس نلاحظ أن:

$$ق'(س) = \frac{ظاس}{جتاس} = \frac{جتاس + جا^2 س}{جتاس} = 1 + \frac{جا^2 س}{جتاس}$$

$$\frac{1}{جتاس^2} \Leftarrow (ظاس)' = \frac{1}{جتاس}$$

٤- بنفس طريقة - ٣ - ثبت أن (ظاس)' =  $\frac{1}{جتاس^2}$

رابعاً: التابع الأسّي الطبيعي  $Q(s) = e^{-s}$

لقد برهنا في فصل النهايات أن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n = e^s$$

وحسب منشور الكرمي يمكن كتابة:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n = e^s$$

$$\Leftrightarrow e^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{s}{n})^n}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{sn}}{1} = e^s$$

خامساً: التابع اللوغاريتمي الطبيعي  $Q(s) = \ln s$

$$\text{نلاحظ أنه من أجل } s = \ln s = \ln e^s = s \Rightarrow \frac{ds}{ds} = 1$$

$$\text{وبالتالي نحصل على } \frac{ds}{ds} = 1 \Rightarrow \frac{ds}{ds} = 1 \Rightarrow \frac{ds}{ds} = 1$$

سادساً: التوابع القطعية

١- لإيجاد مشتق جا (قطع)  $s$  نتبع نفس الطريقة التي اتبعناها لحساب مشتق

$Q(s) = \sin s$  فنجد أن  $(\sin s)' = \cos s$

٢- ومشتق جتا (مقطع)  $s$  = جا (قطع)  $s$

٣- ومشتق ظا (قطع)  $s$  =  $\frac{1}{\cos^2 s} = \sec^2 s$

$$٤ - مشتق (ظنا (قطع) س) = ' \frac{1}{(جا (قطع) س)}$$

سابعاً: اشتقاق التوابع العكسية للتوابع المثلثية:

الآن من أجل ص = قوس جا س نجد أن س = جا ص

$$\Leftarrow \frac{لص}{نص} = جتا ص = لجا ص = \frac{1}{لر} س - \frac{1}{ر} س$$

$$\Leftarrow \frac{لص}{نص} = \frac{1}{لر} س - \frac{1}{ر} س = ' (وتر جا س) = \frac{1}{لر} س - \frac{1}{ر} س$$

وينفس الطريقة نجد أن

$$(قوس جتا س) = ' \frac{1-}{س - \frac{1}{ر}} = ' (قوس ظا س) = \frac{1}{س + 1}$$

ثامناً: اشتقاق التوابع العكسية لتوابع القطعية:

أولاً من أجل ص = قوس جا (قطع) س نجد أن س = جا (قطع) ص

$$\Leftarrow \frac{لص}{نص} = جتا (قطع) ص = لجا (قطع) ص = \frac{1-}{لر} س - \frac{1-}{ر} س$$

$$\Leftarrow \frac{لص}{نص} = \frac{1-}{لر} س - \frac{1-}{ر} س = ' (قوس جا (قطع) س) = \frac{1}{س - \frac{1}{ر}}$$

وينفس الطريقة السابقة نثبت أن:

$$(قوس جتا (قطع) س) = ' \frac{1-}{س - \frac{1}{ر}} = ' (قوس ظا (قطع) س) = \frac{1-}{س - 1} = ' (قوس ظنا (قطع) س) = \frac{1-}{س - 1}$$

## قاعدة الاشتقاق الضمني:

إذا كان  $y = f(x)$  حيث  $x$  تابعاً ضمنياً في  $y$  عندئذ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} = f'(x) \cdot 1 = f'(x)$$

مثال: إذا كان لدينا التابع  $y = f(x)$  لـ  $x = x^2 + 1$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot (2x) = 2x \cdot \frac{dy}{dx}$$

وحسب القاعدة الأخيرة يمكننا الآن إيراد الجدول التالي:

مشتق التابع	التابع
$\frac{dy}{dx}$	$y$
$\frac{dy}{dx}$	$y^2$
$\frac{dy}{dx}$	$y^3$
$\frac{dy}{dx}$	$y^4$
$\frac{dy}{dx}$	$y^5$
$\frac{dy}{dx}$	$y^6$
$\frac{dy}{dx}$	$y^7$
$\frac{dy}{dx}$	$y^8$
$\frac{dy}{dx}$	$y^9$
$\frac{dy}{dx}$	$y^{10}$

## نتائج هامة في الاشتقاق والاستمرار:

مبرهنة: إذا كان  $f$  قابلاً للاشتقاق فهو مستمر والعكس غير صحيح بالضرورة.

البرهان: إذا كان  $q$  قابلاً للاشتقاق عند  $s$  فإنه يمكن كتابة:

$$q(s+h) - q(s) = \mu \cdot h + \epsilon$$

حيث  $\epsilon$  عدداً حقيقياً محدوداً و  $\mu$  يحقق أن  $\mu \leftarrow \dots$  (هـ)  $\mu = 0$ ، والآن بكتابه  $s = s+h$  واختيار  $h = \frac{\epsilon}{\mu}$  نجد أن

$$|q(s) - q(s+h)| \geq |\mu| \cdot |h| = |\mu| \cdot \frac{\epsilon}{|\mu|} = \epsilon$$

فالتابع  $q$  مستمر تعريفاً لأن نهاسر  $\leftarrow s$   $q(s) = q(s+h)$  بالنسبة للقسم الثاني من المبرهنة نلاحظ التابع  $q(s) = |s|$  إن هذا التابع يمكن كتابته بالشكل  $q(s) = \begin{cases} s & s \geq 0 \\ -s & s < 0 \end{cases}$

وهو مستمر عند  $s = 0$  ذلك لأن:

$$q(s) = q(s+h) = q(s) - q(s+h) = q(s) - q(s) = 0$$

لكن  $q$  غير قابل للاشتقاق ذلك لأن

$$q'(s) = \frac{q(s+h) - q(s)}{h} = \frac{q(s) - q(s)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$q'(s) = \frac{q(s) - q(s)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

ونلاحظ أن  $q'(s) = 0 \neq q'(s)$  يسار  $q'(s)$

$\Leftarrow q$  غير قابل للاشتقاق عند  $s = 0$

## تمارين محلولة

أوجد المشتق الأول لكل من التوابع التالية:

١- ق(س) = وترظا (لور س)

الحل: ق(س) =  $\frac{1}{(لور س) + 1} \times \frac{1}{س}$

٢- لور ٢ قوس جتا س

الحل: ق(س) =  $\frac{1}{\sqrt{٢ قوس جتا س}} \times \frac{1}{\sqrt{٢ قوس جتا س}} \times \frac{1}{١ - \frac{1}{٢}}$

٣- ق(س) = وتر جا (قطع) (جا س) + (١)

الحل: ق(س) =  $\frac{1}{\sqrt{١ - (١ + س^٢)}} \times \frac{1}{جتا س \times (١ + س^٢)}$

٤- ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} ٣ + س^٢ \\ ٥ + س \\ ٣ + س^٢ + س \end{array} \right\}$

٥. غ ٤, ٢

الحل: ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} ٢ \\ ١ \\ ٤, ٢ \end{array} \right\}$

$$\pi \geq \pi$$

$$0 - \pi^2 \geq \pi > \pi$$

$$\pi > 0 - \pi^2$$

جنا م

جنا م

ظنا م

$$0 - \pi(\pi) = \begin{cases} \text{جنا م} \\ \text{جنا م} \\ \text{ظنا م} \end{cases}$$

$$\pi > \pi$$

$$0 - \pi^2 > \pi > \pi$$

$$\pi > 0 - \pi^2$$

جنا م

جنا م

ظنا م

$$\text{الحل: } \pi^-(\pi) = \begin{cases} \text{جنا م} \\ \text{جنا م} \\ \frac{1}{\text{جنا م}} \end{cases}$$

$$\frac{1 + \pi + \pi^2}{1 + \pi^2} - \pi$$

$$\frac{(1 + \pi + \pi^2)(1 + \pi^2) - (1 + \pi^2) \cdot (1 + \pi + \pi^2)}{(1 + \pi^2)^2} = \pi^-(\pi)$$

$$7 - \pi(\pi) = \text{هـ قوس جنا م}$$

$$\frac{1}{\pi^2 - \pi} \times \text{هـ قوس جنا م}$$

$$8 - \pi(\pi) = \text{هـ قوس جنا م} \quad [\text{هـ م}^2]$$

$$\frac{1}{1 - \pi^2} \times \text{هـ م}^2 \times \pi^2 = \pi^-(\pi)$$

$$9 - \pi(\pi) = \text{هـ قوس ظنا م}^2$$

$$\frac{1}{\pi + 1} \times \text{هـ قوس ظنا م}^2 \times \pi^2 = \pi^-(\pi)$$

$$10 - \pi(\pi) = \text{هـ م}^2 \times \text{هـ م}$$

$$\text{الحل: } \pi^-(\pi) = \text{هـ م}^2 \times \text{هـ م}^2 \times \text{هـ م}$$

$$١١- ق(س) = س. لوس$$

$$\text{الحل: ق(س)} = لوس + س. \frac{1}{س} = \frac{لوس}{س} + ١$$

$$١٢- ق(س) = \frac{لوس}{س}$$

$$\text{الحل: ق(س)} = \frac{س. \frac{1}{س} - لوس}{\frac{1}{س}} = \frac{١ - لوس. س}{س}$$

$$١٣- ق(س) = ٣$$

$$\text{الحل: ق(س)} = ١. لوس$$

طريقة الاشتقاق بواسطة اللوغاريتم

إذا كنا أمام تابع ق(س) معقد من حيث الشكل الجبري نستخدم في الغالب هذه الطريقة وهي كما يلي:

$$\text{إذا كان لدينا } ص = ق(س)$$

نقوم أولاً بأخذ لوغاريتم الطرفين  $لوس = لوق(س)$

$$\text{ثم نشتق } \frac{لص}{ص} = \frac{ق(س)}{ق(س)} . لوس$$

$$\text{ثم نستخرج المقدار } ص^{-١} = \frac{لص}{ص} = \frac{ق(س)}{ق(س)} . لوس$$

ونكون بذلك قد حصلنا على مشتق هذا التابع.

مثال: ص = س لاشتقاق هذا التابع تجري الخطوات لوص = لوص = س = س. لوص

$$\frac{ص}{ص} = (١ \cdot لوص) = ص = \frac{لوص}{لوص} = ص = (١ + لوص) \cdot ص = (١ + لوص) \cdot (١ + لوص) = (١ + لوص)^2$$

مثال: ص = (١ + لوص)^2

$$لوص = لوص = (١ + لوص)^2 = ٥ \cdot لوص = (١ + لوص)^2 = \frac{لوص}{ص} = \frac{٥ \cdot لوص}{١ + لوص}$$

$$\frac{لوص}{ص} = \frac{١٠ \cdot لوص}{(١ + لوص)^2} = \frac{١٠ \cdot لوص}{(١ + لوص)^2} = \frac{١٠ \cdot لوص}{(١ + لوص)^2} = \frac{١٠ \cdot لوص}{(١ + لوص)^2}$$

مثال: ص = (جاس) = س

$$لوص = لوص = (جاس) = س = لوص = لوص = (١ \cdot لوص + لوص + لوص) = لوص$$

$$\frac{لوص}{ص} = \frac{لوص}{ص} = (١ + لوص + لوص + لوص) = (١ + لوص + لوص + لوص) = (١ + لوص + لوص + لوص)$$

مثال: ص = هـ = س

$$\frac{لوص}{ص} = \frac{لوص}{ص} = ٢ = \frac{لوص}{ص} = ٢ = \frac{لوص}{ص}$$

$$\frac{لوص}{ص} = \frac{لوص}{ص} = ٢ = \frac{لوص}{ص} = ٢ = \frac{لوص}{ص}$$

تعريف الاشتقاق من مراتب عليا:

نعرف المشتق الثاني للتابع ق بأنه مشتق المشتق ويرمز له ق' (س) حيث

وهكذا نعرف المشتق من المرتبة (ن) تدريجياً بالشكل ق' (س) = [ق' (س)]

ودستور لايتتير لاشتقاق تابع من الشكل ق = ع. ل حتى المرتبة (ن):

أولاً: سنورد الرموز التالية

ل<sup>(١)</sup> مشتق ل من الرتبة (ن)

ل<sup>(٢)</sup> مشتق ل من المرتبة م

وسنضع اصطلاحاً ل<sup>(٥)</sup> = ع وع = ل<sup>(٥)</sup>

ولنلاحظ ما يلي:

ق<sup>(١)</sup> = ع. ل<sup>(١)</sup> + ع<sup>(١)</sup>. ل

ق<sup>(٢)</sup> = ع. ل<sup>(٢)</sup> + ع<sup>(٢)</sup>. ل<sup>(١)</sup> + ع<sup>(١)</sup>. ل<sup>(٢)</sup> + ع<sup>(٢)</sup>. ل

ق<sup>(٣)</sup> = ع<sup>(٣)</sup>. ل<sup>(٣)</sup> + ع<sup>(٣)</sup>. ل<sup>(٢)</sup> + ع<sup>(٢)</sup>. ل<sup>(٣)</sup> + ع<sup>(٢)</sup>. ل<sup>(٢)</sup> + ع<sup>(٢)</sup>. ل<sup>(٣)</sup> + ع<sup>(٢)</sup>. ل<sup>(٢)</sup>

وهكذا حتى نصل إلى الدستور:

$$ق^{(n)}(س) = \sum_{j=0}^n ع^{(j)} \cdot ل^{(n-j)} : ع^{(0)} = ل^{(n)} : ع^{(n)} = ل^{(0)}$$

والآن سنثبت هذا الدستور بطريقة الاستقراء الرياضي:

١- نلاحظ أنه من أجل (ن = ٢) القضية محققة حسب ما ورد أولاً.

٢- لنفرض الآن صحة القضية من أجل (ن) حيث

$$ق^{(n)}(س) = \sum_{j=0}^n ع^{(j)} \cdot ل^{(n-j)} : ع^{(0)} = ل^{(n)} : ع^{(n)} = ل^{(0)} \dots (*)$$

٣- سنثبت الآن هذه القضية من أجل (ن + ١) الآن باشتقاق العلامة

(\*) لنجد ان:

$$ق^{(n)}(س) = ع^{(1)} \cdot ل^{(1)}(س) + ..... + ع^{(n)} \cdot ل^{(n)}(س) + ع^{(n+1)} \cdot ل^{(n+1)}(س)$$

$$= ع^{(1)} \cdot ل^{(1)}(س) + ع^{(2)} \cdot ل^{(2)}(س) + ..... + ع^{(n)} \cdot ل^{(n)}(س) + ع^{(n+1)} \cdot ل^{(n+1)}(س)$$

وهكذا بمتابعة الحدود حداً حداً نجد أن:

$$ق^{(n)}(س) = \sum_{k=1}^{n+1} ع^{(k)} \cdot ل^{(k)}(س) \text{ وهو دستور لايبنتز ويكون محققاً من}$$

$$أجل ن < ٢$$

مثال: اوجد المشتق التوحيدي للتابع  $ق(س) = س^٢$  جتا  $س$

وبملاحظة  $ع = جتا س$  و  $ل = س^٢$

$$\begin{cases} ع' = -جا س = \left( \frac{\pi}{٢} + س \right) جتا س \\ ع'' = -جا س = جتا س = \left( \frac{\pi}{٢} + س \right) جتا س \\ ع''' = جا س = جتا س = \left( \frac{\pi}{٢} + س \right) جتا س \end{cases} \Leftrightarrow ع^{(n)} = جتا س \left( \frac{\pi}{٢} + س \right)^{n-1}$$

ولدينا أيضاً

$$ل^{(1)} = س^٢ \leftarrow ل^{(2)} = ٢س \leftarrow ل^{(3)} = ٢ \leftarrow ل^{(4)} = ٠$$

والآن بكتابة دستور لايبنتز

$$ق^{(n)}(س) = ع^{(1)} \cdot ل^{(1)}(س) + ع^{(2)} \cdot ل^{(2)}(س) + ..... + ع^{(n)} \cdot ل^{(n)}(س) + ع^{(n+1)} \cdot ل^{(n+1)}(س)$$

$$= ع^{(1)} \cdot ل^{(1)}(س) + ع^{(2)} \cdot ل^{(2)}(س) + ..... + ع^{(n)} \cdot ل^{(n)}(س) + ع^{(n+1)} \cdot ل^{(n+1)}(س)$$



$$\Leftarrow \text{ق } (n) = (n) = \text{جنا}^2 + \left(\frac{\pi n}{2} + (n) + \pi\right) \text{جنا} + \left(\pi \cdot \frac{1-n}{2} + (n) + \pi\right) \text{جنا} + \left(\pi \cdot \frac{2-n}{2} + (n) + \pi\right) \text{جنا} + \dots$$

والآن إذا أردنا حساب المشتق العاشر لهذا التابع نجد أن

$$\text{ق } (n) = (n) = \text{جنا}^2 + (\pi n + \pi) \text{جنا} + (\pi \cdot \frac{1}{2} + (n) + \pi) \text{جنا} + (\pi \cdot \frac{2}{2} + (n) + \pi) \text{جنا} + \dots$$

$$= \text{جنا}^2 + (\pi \text{جنا} + \pi) \text{جنا} + (\pi \cdot \frac{1}{2} + (n) + \pi) \text{جنا} + (\pi \cdot \frac{2}{2} + (n) + \pi) \text{جنا} + \dots$$

$$= \text{جنا}^2 + \pi \text{جنا} + \pi \cdot \frac{1}{2} \text{جنا} + \pi \cdot \frac{2}{2} \text{جنا} + \dots$$

$$= \text{جنا}^2 + \pi \text{جنا} + \pi \cdot \frac{1}{2} \text{جنا} + \pi \cdot \frac{2}{2} \text{جنا} + \dots$$



## تمارين غير محلولة

احسب بواسطة دستور لايتيز المشتق السابع لكلاً من التوابع التالية:

$$1- ق(س) = س^2 هـ س$$

$$2- ق(س) = س^3 جـ س^2 س$$

$$3- ق(س) = س هـ س جـ س$$

$$4- ق(س) = س^3 لود س^2 س$$

$$5- ق(س) = س^7 وتر ظا س$$

## تطبيقات ونتائج ومبرهنات الاشتقاق

تعريف: النقطة الموضعية الصغرى: نقول أن جـ هي نقطة موضعية صغرى للتابع جـ على المجال  $[a, b]$  إذا كان  $\forall س \in [a, b]: ق(جـ) \geq ق(س)$ .

تعريف: النقطة الموضعية العظمى: نقول أن جـ نقطة موضعية عظمى للتابع جـ على المجال  $[a, b]$  إذا كان  $\forall س \in [a, b]: ق(جـ) \leq ق(س)$ .

تعريف: النقطة الموضعية القصوى: نقول أن جـ نقطة موضعية قصوى للتابع جـ على المجال  $[a, b]$  إذا كان نقطة موضعية عظمى أو صغرى.

مبرهنة: إذا كان ق قابلاً للاشتقاق متزايداً على  $[a, b]$  فإن ق(س) < ٠

البرهان: إذا نظرنا إلى نهاية ق(س) = نها  $\frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$  نجد انه باعتبار

$$\text{التابع متزايد ق(س+هـ) < ق(س) } \Leftrightarrow \text{ق(س+هـ) - ق(س) < ٠} \\ \Leftrightarrow \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} < ٠$$

$$\Leftarrow \text{ق' (س)} = \text{نها} \frac{\text{ق (س + هـ)} - \text{ق (س)}}{\text{هـ}} < ٠$$

مبرهنة: إذا كان ق قابلا للاشتقاق على المجال [٠، ب] فإنه إذا كان ق متناقصا

$$\Leftarrow \text{ق' (س)} > ٠ \quad \forall \text{ س} \in [٠، ب].$$

البرهان: يتم بطريقة مشابهة للمبرهنة السابقة.

مبرهنة فيرما: إذا كان ق تابعا قابلا للاشتقاق. كانت جـ نقطة موضوعية

فصوى للتابع ق على المجال عندئذ فإن ق' (جـ) = ٠

البرهان: الآن بفرض جـ نقطة موضوعية عظمى - وستناقش حالة جـ

موضوعية صفوى بنفس الطريقة، عندئذ فإن  $\Leftarrow \text{ق' (س)} < \text{ق' (س)}$ :

$\forall \text{ س} \in [٠، ب]$ . وملاحظة المقدار.

$$\text{يمين} \text{نها} \frac{\text{ق (جـ + هـ)} - \text{ق (جـ)}}{\text{هـ}}$$

ولأن جـ قيمة موضوعية عظمى نجد أن ق' (جـ + هـ) - ق' (جـ) > ٠

$$\text{يمين} \text{ق' (جـ)} = \text{ق' (جـ)} = \text{نها} \frac{\text{ق (جـ + هـ)} - \text{ق (جـ)}}{\text{هـ}} \geq ٠$$

وذلك لأن ق' (جـ + هـ) - ق' (س) > ٠، الآن بالنسبة للمشتق

اليسار سنلاحظ أن يسار

$$\text{ق' (جـ)} = \text{ق' (جـ)} = \text{نها} \frac{\text{ق (جـ + هـ)} - \text{ق (جـ)}}{\text{هـ}} \leq ٠ \quad \text{وذلك لان هـ} < ٠, \text{ ق' (جـ)}$$

$$+ \text{هـ} - \text{ق' (س)} > ٠$$

لكن التابع ق قابلا للاشتقاق  $\Leftarrow \text{ق' (جـ)} = \text{يمين} \text{ق' (جـ)} = \text{يسار} \text{ق'}$

(جـ)  $\Leftarrow \text{ق' (جـ)} = ٠$  وتم المطلوب

ملاحظة هامة: أن شروط مبرهنة فيرما تعتبر شروط لازمة وغير كافية حيث يمكن أن نجد  $Q = 0$  دون أن تكون ج نقطة موضوعية قصوى.

مثال: ق (س) = س<sup>2</sup> نلاحظ أن ق (س) = س<sup>3</sup> س<sup>2</sup> ⇔ ق (0) = 0

بينما س = 0 ليست قيمة موضوعية قصوى للتابع ق (س) = س<sup>2</sup>.

مبرهنة رول: إذا كان لدينا تابعا ق محققا للشروط التالية:

ق معرفا على المجال  $[a, b]$ .

ق مستمرا وقابلا للاشتقاق على  $[a, b]$ .

ق (a) = ق (b).

عندئذ فإنه توجد ج  $\in [a, b]$  بحيث ق (ج) = 0

البرهان: الآن بفرض التابع ق تابعا لا ثابتا عندئذ فإن ق (س) = 0 وانتهى البرهان.

إذا لم يكن ق ثابتا فإنه مطرد وباعتباره مستمرا فإنه يحقق جميع قيمه على المجال  $[a, b]$  وعندها فإنه يوجد نقطة قيمة قصوى (أما صغرى أو عظمى). وذلك استنادا إلى الشرط الثالث ق (a) = ق (b) ولتكن ج  $\in [a, b]$  وبالتالي وحسب مبرهنة فيرما فإن ق (ج) = 0

مبرهنة لاجرانج: إذا كان ق تابعا محققا للشروط التالية:

ق معرف على المجال  $[a, b]$ .

ق مستمرا وقابلا للاشتقاق على المجال  $[a, b]$  عندئذ فإنه توجد نقطة جـ

$\in [a, b]$  بحيث أن

$$\frac{ق(ب) - ق(ا)}{ب - ا} = ق(ج)$$

البرهان: أولاً لنشكل التابع

$$ص(س) = ق(س) - ق(ا) - \left( \frac{ق(ب) - ق(ا)}{ب - ا} \right) (س - ا)$$

نلاحظ أن ص(س) تابعا مستمرا للاشتقاق على [ا، ب] ويحقق الخاصية

$$ص(ا) = ص(ب) = ٠$$

وهذا يعطينا حسب نظرية رول انه توجد نقطة جـ ∈ [ا، ب] بحيث ص(جـ) = ٠

$$\text{وملاحظة أن } ص(س) = ق(س) - \left( \frac{ق(ب) - ق(ا)}{ب - ا} \right) (س - ا)$$

$$\Leftrightarrow ص(جـ) = ٠ = ق(جـ) - \left( \frac{ق(ب) - ق(ا)}{ب - ا} \right) (جـ - ا)$$

$$\text{وهو المطلوب. } ق(جـ) - \left( \frac{ق(ب) - ق(ا)}{ب - ا} \right) (جـ - ا)$$

ملاحظة هامة: إن الشروط الواردة في مبرهنتي روي ولا غرانج هي شروط كافية لازمة - الجدير بالذكر أن مبرهنة لاغرانج تسمى أيضاً مبرهنة التزايدات المحدودة.

مبرهنة كوشي: إذا كان ق. ك تابعين بحيث

$$١ - ق، ك مستمران على [ا، ب]$$

٢- ق، ك قابلان للاشتقاق على المجال [١،ب] عندئذ توجد جـ د [١،ب]

$$\text{بحيث أن } \frac{ق(ج) - ق(ب)}{ك(ج) - ك(ب)} = \frac{ق(د) - ق(ب)}{ك(د) - ك(ب)}$$

حيث ك(ب) ≠ ك(١)، ك'(س) ≠ ٠

البرهان: لنشكل المتابع أولاً:

$$\Psi(س) = ق(س) - ق(ب) - \left( \frac{ق(د) - ق(ب)}{ك(د) - ك(ب)} \right) (ك(س) - ك(ب))$$

ونلاحظ أن  $\Psi$  هو تابع مستمر وقابل للاشتقاق وفيه  $\Psi(ب) = \Psi(١) = ٠$

عندئذ فإنه وحسب مبرهنة رول توجد جـ د [١،ب] بحيث  $\Psi'(ج) = ٠$

$$\text{وبملاحظة أن } \Psi'(س) = ق'(س) - \left( \frac{ق(د) - ق(ب)}{ك(د) - ك(ب)} \right) ك'(س)$$

$$\Psi'(ج) = ق'(ج) - \left( \frac{ق(د) - ق(ب)}{ك(د) - ك(ب)} \right) ك'(ج) = ٠ \Leftrightarrow \frac{ق(د) - ق(ب)}{ك(د) - ك(ب)} = \frac{ق'(ج)}{ك'(ج)}$$

وهو المطلوب.

مبرهنة أويلر: إذا كان لدينا ق، ك تابعين مستمران وقابلان للاشتقاق على [١،ب] عندئذ فإن:

$$\text{نُها } \frac{ق(س)}{ك(س)} = \text{نُها } \frac{ق'(س)}{ك'(س)} \text{ حيث } ك(س) \neq ٠, ك'(س) \neq ٠$$

البرهان: إذا أجرينا المناقشة على مجال [س، س+١] بحيث س+١ د  
[س، س+١] وطبقنا نظرية كوشي نجد أنه توجد [س، س+١] بحيث

يمكننا الكتابة

$$\frac{ق(م_ج) - ق(م_ب) - ق(م_ن)}{ك(م_ج) - ك(م_ب) - ك(م_ن)} = \frac{ق(م_ج)}{ك(م_ج)}$$

وبفرض أن  $هـ = س + ٥ - ١ = س$  نجد أنه

$$\frac{ق(م_ج) - ق(م_ب) - ق(م_ن)}{ك(م_ج) - ك(م_ب) - ك(م_ن)} = \frac{ق(م_ج)}{ك(م_ج)}$$

والآن بأخذ نهايتي الطرفين عندما  $هـ \leftarrow ٠$  نجد أن:

$$\frac{نها [ق(م_ج) - ق(م_ب) - ق(م_ن)]}{نها [ك(م_ج) - ك(م_ب) - ك(م_ن)]} = \frac{نها ق(م_ج)}{نها ك(م_ج)}$$

$$\frac{نها ق(م_ج)}{نها ك(م_ج)} = \frac{نها ق(م_ج)}{نها ك(م_ج)}$$

امثلة تطبيقية:

$$\frac{نها جاس}{نها ساس}$$

الحل: بملاحظة أن  $\frac{نها جاس}{نها ساس} = ٠$  وهذه حالة عدم تعيين لإزالتها نستخدم قاعدة:

$$\frac{نها جاس}{نها ساس}$$

$$\frac{نها جاس}{نها ساس} = \frac{نها جاس}{نها ساس}$$

$$٢ - احسب النهاية ق(م) = \frac{١+م}{٥+م٣} \text{ بملاحظة أن } \frac{نها ١+م}{نها ٥+م٣} = \frac{١}{٥} \text{ ولإزالة}$$

حالة عدم التعيين هذه نستخدم قاعدة أوبتال لنجد أن

$$\frac{نها ١}{نها ٣} = \frac{نها ١}{نها ٣} = \frac{١}{٣}$$

٣- احسب النهاية نها  $\frac{\text{جامس} - \text{ظامس}}{٢}$  نلاحظ نها  $\frac{\text{جامس} - \text{ظامس}}{٢}$  وهي حالة عدم تعيين أيضا لإزالتها نستخدم قاعدة أوبتال لنجد أن:

$$\frac{\text{نها} \frac{\text{جامس} - \text{ظامس}}{٢}}{\text{نها} \frac{\text{جامس} - \text{ظامس}}{٢}} = \frac{\text{نها} \frac{\text{جامس} - ١}{٢}}{\text{نها} \frac{\text{جامس} - ١}{٢}} = \frac{٠}{٠}$$

وهي حالة عدم تعيين أيضاً لإزالتها نستخدم قاعدة أوبتال لنجد أن

$$\frac{\text{نها} \frac{\text{جامس} - \text{ظامس}}{٢}}{\text{نها} \frac{\text{جامس} - ١}{٢}} = \frac{\text{نها} \frac{\text{جامس} - ١}{٢}}{\text{نها} \frac{\text{جامس} - ١}{٢}} = \frac{١/٠ - ٠}{١} = \frac{١/٠ - ٠}{١}$$

ملاحظة مهمة:

إن مبرهنة أوبتال صحيحة من أجل  $\infty \leftarrow \text{أو} \infty \leftarrow$  أو  $\infty \leftarrow$  أو  $\infty \leftarrow$  من.

نستخدم قاعدة أوبتال للتخلص من حالات عدم التعيين من الشكل

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ أو } \frac{0}{0} \text{ أو } \frac{\infty}{0} \text{ أو } \frac{0}{\infty}$$

مناقشة عامة في حالات عدم التعيين: أن حالات عدم التعيين تأتي على ثلاثة أشكال هامة

الشكل الأول: حالة عدم التعيين من الشكل  $\frac{0}{\infty}$  أو  $\frac{\infty}{0}$

وفي حالة للتخلص منها نستخدم قاعدة أوبتال

$$\text{مثال ١: نها} \frac{\text{جامس} - ١}{٣ - \text{جامس}} \text{ نلاحظ نها} \frac{\text{جامس} - ١}{٣ - \text{جامس}} = \frac{٨١ - ١}{٣ - ٨١} = \frac{٨٠}{-٧٨}$$

$$\text{والآن بتطبيق أوبتال أن نها} \frac{\text{جامس} - ١}{٣ - \text{جامس}} = \frac{١}{-١} = -١$$

مثال ٢: نها  $\frac{5+u}{1+u^2}$  بملاحظة أن نها  $\frac{5+u}{1+u^2}$  الآن بتطبيق قاعدة أوبتال نجد

$$\text{أن نها } \frac{5+u}{1+u^2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

مثال ٣: نها  $u \cdot \infty$  نلاحظ أن نها  $u \cdot \infty = \infty$

$$\text{الآن لتطبق أوبتال نها } u \cdot \infty = \frac{u}{\frac{1}{u}} = \frac{1}{\frac{1}{u}} = u$$

٢- الشكل الثاني:  $\infty - \infty$  يمكن إرجاع هذا الشكل إلى الشكل الأول أو التخلص منه نهائياً بواسطة عمليات جبرية بسيطة أشهرها " الضرب بالمرافق".

$$\text{مثال: نها } \sqrt{u} - \sqrt{1+u} \text{ نلاحظ أن نها } \sqrt{u} - \sqrt{1+u} = \infty - \infty$$

الآن لنضرب ونقسم بالمقدار  $\sqrt{u} + \sqrt{1+u}$  ويسمى المرافق  $(\sqrt{u} - \sqrt{1+u})$  فنجد أن

$$\text{نها } \sqrt{u} - \sqrt{1+u} = \frac{\sqrt{u} + \sqrt{1+u}}{\sqrt{u} + \sqrt{1+u}} \times \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{1+u}} = \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{1+u}}$$

٣. الشكل الثالث: (١) لو (٠) لو (٠)

ويمكن التخلص منها بواسطة أخذ لوغريتم المقدار وحساب نهاية هذا اللوغاريتم ومن ثم العودة إلى الشكل الأول.

$$\text{مثال: نها } (u) \ln(u) \text{ نجد أن نها } (u) \ln(u) = 0 \cdot 0 = 0$$

الآن نأخذ لوغاريتم الطرفين في العلاقة:

$$ص = (جتاس) \frac{1}{n} \Leftarrow يو ص = \frac{1}{n} \cdot يو جتاس$$

الآن نحسب نهاية هذا اللوغاريتم. حيث  $(لو = 1 = 0)$

$$\frac{نها يو ص}{نها يو} = \frac{نها (جتاس)}{نها} \cdot \frac{نها يو}{نها يو} = \frac{نها (جتاس)}{نها}$$

حالة عدم تعيين من الشكل الأول نعالجها وفق أوتال لنجد أن:

$$\frac{نها (جتاس)}{نها} = \frac{نها (جتاس)}{نها} \cdot \frac{نها يو}{نها يو} = \frac{نها (جتاس)}{نها} \cdot \frac{نها يو}{نها يو} = \frac{نها (جتاس)}{نها}$$

$$والآن نجد أن نها يو ص = 0$$

$$والآن نجد أن نها = 1 \Leftarrow نها (جتاس) \frac{1}{n} = 1$$

## تمارين عامة

١. بين في كلاً مما يلي إذا كان التابع المعطى مستمراً أم لا عند النقطة المعطاة

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{س} > 0 \\ \text{س} = 0 \\ \text{س} \leq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س} \\ 2 + \text{س} \end{array} \quad \text{١- ق(س)} \\
 & \left. \begin{array}{l} \text{س} \geq 0 \\ 1 > \text{س} > 0 \\ \text{س} \leq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + \text{س}^2 \\ 2 + \text{س} \\ 5 + \text{س} \end{array} \quad \text{٢- ق(س)} \\
 & \left. \begin{array}{l} \text{س} < 1 \\ \text{س} \geq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 + \text{س} \\ 2 - \text{س} \end{array} \quad \text{٣- ق(س)} \\
 & \left. \begin{array}{l} \text{س} < 1 \\ \text{س} = 1 \\ \text{س} > 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 + \text{س} \\ 7 \\ 4 + 2\text{س} \end{array} \quad \text{٤- ق(س)}
 \end{aligned}$$

وبين فيما سبق نوع النقطة إذا كانت نقطة انقطاع.

ب. أوجد مشتق كلاً من التوابع التالية:

$$1 - \text{ق(س)} = \text{س}^2 + \text{جاس}$$

$$2 - \text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س}} \cdot \text{جاس}$$

$$3 - \text{ق(س)} = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

٤- ق(س) = س. س. لومس

٥- ق(س) = ه. س. س. ٢

٦- ق(س) = ه. س. س. س. جامس

٧- ق(س) = ظا ٢ س

٨- ق(س) = ظقا ١ س

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \geq 0 \\ 1 + \text{س}^2 \\ ٤ + \text{س}^2 \\ ٥ + \text{س}^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} ٩ \\ ١ \\ ١ \\ ١ \end{array}$$

٩- ق(س) = لومس ١ - ٢

١٠- ق(س) = جامس لومس

١١- ق(س) = ظقا (س)

١٢- ق(س) = لومس (١/س)

١٣- ق(س) = س + جامس

١٤- ق(س) = (جامس) ١/٢

١٥- ق(س) =  $\frac{1 + \text{س}^2}{1 - \text{س}^2}$

١٦- ق(س) =  $\frac{\text{س}^2 \text{ جامس}}{\text{ه. س}}$

ج- ادرس وجود مشتق لكلاً من التوابع التالية عند النقاط المعطاة.

- ١-  $f(x) = |x|$  عند  $x=0$
- ٢-  $f(x) = |x|$  عند  $x=0$
- ٣-  $f(x) = x^2$  عند  $x=1$
- ٤-  $f(x) = |x^2 + x + 2|$  عند  $x=1$  و عند  $x=-2$
- ٥-  $f(x) = \sin x$  عند  $x = \frac{\pi}{2}$
- ٦-  $f(x) = \cos x$  عند  $x = \frac{\pi}{2}$
- ٧-  $f(x) = \tan x$  عند  $x = \frac{\pi}{2}$

د- احسب المشتق اليميني أو المشتق اليسار أو كليهما معاً حسب ما تجده مناسباً لكلاً من التوابع التالية عند النقاط المعطاة.

- ١-  $f(x) = |x^2 - 1|$  عند  $x=1$  و  $x=-1$
- ٢-  $f(x) = x^2$  عند  $x=0$
- ٣-  $f(x) = |x|$  عند  $x=0$
- ٤-  $f(x) = |x|$  عند  $x=1$
- ٥-  $f(x) = \cos x$  عند  $x = \frac{\pi}{2}$

هـ - باستخدام قاعدة الاشتقاق بواسطة اللوغاريتم أوجد كلاً من المشتقات التالية:

١-  $f(x) = x^x$

٢-  $f(x) = \cos x$





## الفصل الرابع

المشتقات





المشتق	التابع
$\frac{1}{\text{جنا}^2 \text{ من}} = 1 + \text{ظا}^2 \text{ من}$	ظاس
جنا.ع.ع	جاع
-جنا.ع.ع	جتاع
$\frac{\text{ع}}{\text{جنا}^2 \text{ ع}} = (1 + \text{ظا}^2 \text{ ع}) \text{ ع}$	ظناع
$\frac{1}{\text{من}}$	لوس
$\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$	لوع
هـ	هـ
هـ	هـ
لوس	لوس
ل.ل.ل.ع	ل
$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} > \text{ع} > \frac{\pi}{2} \\ \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ع} - 1}} \end{array} \right\}$	قوس جاع
$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} > \text{ع} > \frac{\pi}{2} \\ \frac{\text{ع} - 1}{\sqrt{\text{ع} - 1}} \end{array} \right\}$	
$\left. \begin{array}{l} 0 > \text{ع} > \pi \\ \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ع} - 1}} \end{array} \right\}$	قوس جتاع
$\left. \begin{array}{l} \pi > \text{ع} > \pi \\ \frac{\text{ع} - 1}{\sqrt{\text{ع} - 1}} \end{array} \right\}$	من = قوس جتاع

المشتق	التابع
$\frac{ع}{ع+1}$	ص = قوس ظا ع
جا (قطع) ع · ع	جتا (قطع) ع
جتا (قطع) ع · ع	جا (قطع) ع
$\frac{ع}{(جتا (قطع) ع)}$	ظا (قطع) ع
جا (قطع) س	جتا (قطع) س
جتا (قطع) س	جا (قطع) س
$\frac{1}{جتا^2 (قطع) س} = 1 - ظا^2 (قطع) س$	ظا (قطع) س
$\frac{1}{س^2 + 1}$	قوس جا (قطع) س = لو (س + س <sup>2</sup> + 1)
$\frac{1 \pm 1}{س^2 - 1}$	قوس جتا (قطع) س = لو (س ± س <sup>2</sup> - 1)
س < 1	قوس ظا (قطع) س = $\frac{1}{4}$ لو $\frac{س+1}{س-1}$
س > 1	قوس ظا (قطع) س = $\frac{1}{4}$ لو $\frac{س+1}{س-1}$
س > 1	قوس ظا (قطع) س = $\frac{1}{4}$ لو $\frac{س+1}{س-1}$

نعني بالرمز "لو" اللوغاريتم النيفري أما إذا أردنا لوغاريتم آخر نضيف إلى الرمز لو أساس هذا اللوغاريتم كما لو كتبنا لو فإننا نعني بذلك اللوغاريتم العشري. ونعني بـ ع ل و وتوابع للمتحوّل المستقبل س.

مشتق تابع للتابع: إذا كان ص = ق (ع) حيث ع تابع للمتحوّل الوسيط فإن مشتق التابع بالنسبة لـ س يساوي مشتقة بالنسبة لـ ع مضروباً بمشتق ع بالنسبة لـ س.

مشتق التابع المعاكس: إذا كان  $ص = ق (س)$  تابعاً له مشتق وإذا حللنا هذه المعادلة بالنسبة لـ  $س$  واستعرضنا  $س$  بدلالة  $ص$  وكان يقابل كل قيمة لـ  $ص$  قيمة واحدة لـ  $س$  وفرضنا  $س = جا (ص)$  نسمي هذا التابع بتابع معاكس للتابع المقروض ويكون:  $ق (س) \& ق (ص) = 1$

يؤخذ مشتق  $ق (س)$  بالنسبة لـ  $س$  المتحول المستقل في هذا التابع أما  $\&$  (ص) فهو مشتق التابع  $\&$  (ص) باعتبار  $ص$  هو المتحول المستقل.

الاشتقاق اللوغاريتمي: إذا كان  $ص$  تابعاً لـ  $س$  فإننا نسمي بالتعريف:

$\frac{ص}{ص}$  بالمشتق اللوغاريتمي لـ  $ص$  ويبرهن بسهولة بأنه مشتق التابع  $| ص |$

وهو القيمة المطلقة لـ  $ص$  كما يمكن برهان الجدول التالي:

المشتق اللوغاريتمي	التابع
$\frac{ق (س)}{ق (س)}$	$ق (س)$
$\frac{ع ل و}{ع ل و}$	$ع. ل. و$
$\frac{ن ع}{ع}$	$ع^{\circ}$
$\frac{ع ل}{ع ل}$	$\frac{ع}{ل}$
$\frac{1}{ع}$	$ع^{\circ}$

المشتقات المتتالية لجداء تابعين: دستور لايتز إذا كان  $ص = ع. ل$  فإن

$ص^{(5)} = ع^{(5)} ل + ع^{(4)} ل' + ع^{(3)} ل'' + ع^{(2)} ل''' + ع^{(1)} ل^{(4)} + ع^{(0)} ل^{(5)}$

## تمارين محلولة

١- احسب مشتق التابع  $v = (2 - 3s) \sqrt{s+1}$

الطريقة الأولى: لنفرض  $u = 2 - 3s$  ،  $v = \sqrt{s+1}$  ،  $v = \sqrt{s+1}$  ونطبق  
دستور مشتق جداء تابعين فنجد:

$$\begin{aligned} v' &= u' \cdot v + u \cdot v' = -3 \cdot \sqrt{s+1} + (2 - 3s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{s+1}} \\ v' &= -3 \sqrt{s+1} + \frac{2 - 3s}{2\sqrt{s+1}} = \frac{-(6s + 6) + 2 - 3s}{2\sqrt{s+1}} \\ v' &= \frac{-9s - 4}{2\sqrt{s+1}} \end{aligned}$$

الطريقة الثانية: لنأخذ لوغاريتم طرفي القيمة المطلقة للعلامة (١) فيكون:

$\ln|v| = \ln|2 - 3s| + \ln\sqrt{s+1}$  لنشتق طرفي هذه العلاقة فنجد:

$$\begin{aligned} \frac{v'}{v} &= \frac{-3}{2 - 3s} + \frac{1}{2\sqrt{s+1}} \\ \frac{v'}{v} &= \frac{-3\sqrt{s+1} + (2 - 3s)}{2\sqrt{s+1}(2 - 3s)} \\ v' &= \frac{-3\sqrt{s+1} + (2 - 3s)}{2\sqrt{s+1}(2 - 3s)} \cdot v = \frac{-3\sqrt{s+1} + (2 - 3s)}{2\sqrt{s+1}(2 - 3s)} \cdot (2 - 3s)\sqrt{s+1} \\ v' &= \frac{-3\sqrt{s+1} + (2 - 3s)}{2} \end{aligned}$$

٢- برهن أن مشتق التابع الزوجي تابع فردي ومشتق التابع الفردي تابع زوجي

الحل: إذا كان التابع  $f(s)$  زوجياً فإن يحقق العلامة:  $f(-s) = f(s)$

إذا أخذنا مشتق طرفي هذه العلامة بالنسبة لـ  $s$  فإننا نجد العلاقة كـ  $q'(s) = -q(s)$

وهي العلاقة التي تبين أن التابع  $q(s)$  فردياً.

أما إذا كان  $q(s)$  فردياً فإنه يحقق العلاقة:  $q'(s) = -q(s)$

وباشتقاق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ  $s$  نجد:  $q''(s) = q(s)$

وهذا يثبت أن  $q(s)$  تابع زوجي وهو المطلوب برهانه

٣- احسب مشتق التابع:  $v = \cosh s$

نفرض  $e = \cosh s$  فيكون:  $v = \cosh s$

$$v' = \cosh' s = e^s \times \cosh s = \frac{1}{\cosh s} \times \cosh s$$

$$٤- احسب مشتق التابع:  $v = \frac{3-s^2}{3+s^2}$  لو  $\frac{1}{12}$$$

يمكن كتابة هذه العلامة بالشكل:

$$v = \frac{1}{12} \left[ \frac{3-s^2}{3+s^2} - \frac{3-s^2}{3-s^2} \right]$$

ومنه:

$$v' = \frac{1}{12} \left( \frac{2}{3+s^2} - \frac{2}{3-s^2} \right) = \frac{1}{9-s^2}$$

طريقة ثانية: يمكن كتابة العلاقة المفروضة بالشكل:

$$(١) \dots\dots\dots \frac{3-s^2}{3+s^2} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{12}{(3+2\sqrt{2})} = \frac{(3-2\sqrt{2})^2 - (3+2\sqrt{2})^2}{(3+2\sqrt{2})} \text{ نأخذ مشتق الطرفين بالنسبة لـ } \sqrt{2} \text{ فنجد}$$

$$\frac{12}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ومنه } \frac{1}{9-2\sqrt{2}}$$

طريقة ثالثة: يمكن اعتباراً من العلاقة (١)، أن نستخرج من بدالة ص فنجد:

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}}{9-2\sqrt{2}}$$

$$\text{ومنه: } \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(3-2\sqrt{2})^2 - (3+2\sqrt{2})^2}{(3+2\sqrt{2})^2} = \frac{9}{(3+2\sqrt{2})^2}$$

ولكن من المعلوم:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1-2\sqrt{2}}{4} = \frac{1-2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1+2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = \frac{1-2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1+2\sqrt{2}}{9-2\sqrt{2}}$$

واستناداً إلى العلاقة (١):

$$\text{نجد: } \frac{9}{(3+2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1-2\sqrt{2}}{4} = \frac{1-2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1+2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = \frac{1-2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1+2\sqrt{2}}{9-2\sqrt{2}}$$

$$\text{ومنه } \frac{1}{9-2\sqrt{2}} = \frac{1}{9-2\sqrt{2}}$$

$$\text{واستناداً إلى قاعدة اشتقاق تابع التابع نجد: } \frac{1}{9-2\sqrt{2}} = \frac{1}{9-2\sqrt{2}}$$

$$٥- \text{ احسب مشتق التابع: } \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-2\sqrt{2}}$$

$$\text{الطريقة الأولى: نفرض: } \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-2\sqrt{2}}$$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-2\sqrt{2}}$$

إذا فرضنا بأن  $\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4}$  يكون:

$$\frac{\overline{\text{ص}} - \overline{\text{ع}}}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{(\text{ظا قطع})^2 - 1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{(\text{ظا قطع})^2 - 1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

الطريقة الثانية: إن العلاقة بالنسبة لـ ص فتجد:

$$\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

فإنه يكون:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

طريقة ثالثة: اعتباراً من العلاقة (٢) يمكننا أن نجد:  $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

واستناداً إلى العلاقة (٣) نجد:  $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$  وأخيراً استناداً إلى قاعدة اشتقاق

التابع المعاكس نجد:

$$\text{ص}^2 = \frac{1}{\text{ص}^2} = \frac{1}{\text{ص}^2} \text{ (قطع) ص}^2$$

$$٦ - \text{احسب مشتق التابع: ص} = \text{قوس ظا (قطع)} \frac{\text{ص}^3 + \text{ص}^2}{\text{ص}^3 + 1}$$

$$\text{الحل: يمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل قوس ظا (قطع) ص} = \frac{\text{ص}^3 + \text{ص}^2}{\text{ص}^3 + 1}$$

نشتق طرفي هذه العلاقة بالنسبة لـ ص فنجد:

$$\frac{(1 - \text{ظا (قطع)}) (\text{ص}^2) (\text{ص}^3 + 1)^3 - (\text{ص}^3 + \text{ص}^2) (3 \text{ص}^2 (\text{ص}^3 + 1)^2)}{(\text{ص}^3 + 1)^4} = \text{ص}^2$$

$$\left[ \frac{(\text{ص}^3 + \text{ص}^2) - 1}{(\text{ص}^3 + 1)} \right] \text{ص}^2 = \text{ص}^2 (1 - \text{ص}^2) \Rightarrow \frac{3}{\text{ص} - 1} = \text{ص}^2$$

$$٧ - \text{احسب ميل مماس الخط البياني للتابع ص}^4 + ١٦ \text{ ص}^4 = ٢٣ \text{ في النقطة } (١, ٢)$$

من المعلوم أن ميل المماس لخط بياني في نقطة من نقاطه يساوي قيمة مشتق التابع الممثل لهذا الخط البياني عندما نبدل فيه المتحول والتابع باحداثيي النقطة المفروضة. نلاحظ بسهولة أن النقطة (١, ٢) تحقق المعادلة المفروضة فهي إذن نقطة من نقاط الخط البياني للتابع بالفرق بهذه المعادلة

لايجاد المشتق صَ نشقه العلاقة المفروضة حيث نعتبر ص المتحول المستقل وص التابع فيكون:

$$٤ \text{ ص}^3 + ١٦, (٤) \text{ ص}^3 = ٠$$

$$\text{منه ص}^2 = \frac{1}{4}$$

إن قيمة هذا المشتق من أجل  $s = 2$ ،  $s = 1$  هي  $\frac{1}{3}$  وهذه قيمة ميل تماس المنحنى في النقطة المفروضة .

٨- برهن صحة العلاقة قوس جتا (قطع)  $s$  = قوس ظا (قطع)  $\frac{1}{s}$  واستنتج من ذلك مشتق التابع  $s$  = قوس ظا (قطع)  $s$  من المعروف ان: قوس ظا قطع  $s = \frac{1}{3}$  لو  $\frac{s+1}{s-1}$   $\frac{s+1}{s-1}$  إذا بدلنا هذه العلاقة  $s$  بـ  $\frac{1}{s}$  فإننا نجد:

$$\text{قوس ظا (قطع) } \frac{1}{s} = \frac{1}{3} \text{ لو } \frac{s+1}{s-1} = \frac{1}{3} \text{ لو } \frac{1+s}{1-s}$$

من المعروف أن الطرف الأيسر من هذه العلاقة يساوي قوس جتا قطع  $s$ . أما حساب مشتق جتا (قطع)

$s$  فإننا نكتب العلاقة المطلوبة بالشكل:  $s$  = قوس جتا (قطع)  $s$  = قوس ظا (قطع)  $s$ .

حيث فرضنا  $s = \frac{1}{3}$  ومن ثم نشتق طرفي هذه العلاقة بالنسبة لـ  $s$

$$\text{فنجد: } \frac{1}{s} = \frac{1}{3} \text{ لو } \frac{s+1}{s-1} = \frac{1}{3} \text{ لو } \frac{1+s}{1-s}$$

٩- احسب المشتقات من الرتبة  $n$  للتتابع:

$\frac{1}{s}$ ،  $s$ ، جتا  $s$ ، جتا  $s$ ، لو  $(s+1)$ ، هـ  $s$  جتا  $s$  إن المشتقات المتتالية للتابع الأول وهو  $s = \frac{1}{3}$ ، وهي:

لبرهان هذا الدستور نتبع طريقة التراجع (الاستقراء) فنفرض انه صحيح من اجل  $n$  بعد برهنا صحته من اجل  $n = 1$ ، و لنبرهن انه صحيح من اجل  $n + 1$  وذلك بان نشق العلاقة الأخيرة فنجد:

$$\left(\frac{r}{r+1}\right)^n = \frac{(1+n)(1-n)\dots 5.3.1 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots n} = 1$$

ونلاحظ أن هذه العلاقة تنتج عن الدستور الأخير من (١) بعد أن نبذل فيه ن بـ + ١ وهذا ما يثبت لنا صحة هذا الدستور مهما كانت قيمة العدد الصحيح ن.

$$\left(\frac{\pi}{\gamma}n+m\right) \text{ جا } p = \nu \text{ د ، ..... } \left(\frac{\pi}{\gamma}r+m\right) \text{ جا } p = \nu \text{ د ، } \left(\frac{\pi}{\gamma}+m\right) \text{ جا } p = \nu \text{ د جتا } p = \nu \text{ د}$$

نبرهن بطريقة التراجع قيمة هذا الدستور من أجل قيمة لـ ن بعد ان  
 حققناه من |اغل ن = ٢ ، ن = ١ بالطريقة ذاتها نبرهن أن المشتق من  
 المرتبة ن للتابع د = جتا أ س هو:

$$\left[ \frac{\pi}{2} (1+n) + m \right] \text{ جا } \psi = (\omega) \text{ من}$$

حساب المشتق من المرتبة  $n$  للتابع  $d = \text{لو} (1 + s)$  فإننا نكتب على التوالي:

$$\dots\dots\dots \frac{1}{(u+1)(1-)} = (u) \text{ and } \frac{1}{(u+1)} = \frac{1}{u+1} = \dots\dots\dots$$

$$د^{(n)} = (1-n) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot (n+1) \cdot \dots$$

نبرهن صحة هذا الدستور من اجل كل قيمة لـ ن بطريقة التراجع التي استعملناه في مطلع هذا التمرين.

أما لحساب المشتق من المرتبة ن للتابع  $d = h^s$  جاس فإننا نفرض  $h^s = l$  جاس ونطبق دستور لايتز المتعلق باشتقاق جداء تابعين بعد أن نلاحظ أن المشتقات المتتالية للتابع  $h^s = h^s$  كلها متساوية بينما تعطى المشتقات المتتالية للتابع جاس بالدستور التالي:

$$ل^{(n)} = جاس \left( \frac{\pi}{2} + n \right)$$

ويكون عندها:

$$د^{(n)} = h^s = جاس \left( \frac{\pi}{2} + n \right) + جاس \left( \frac{\pi}{2} + n - 1 \right) + \dots + جاس \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) + جاس \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

١٠. احسب المشتق ذا المرتبة الخمسين للتابع  $h^s = h^s$  إن هذا التابع جداء تابعين لذا نفرض

$$h^s = l, l = h^s \text{ ونجد على التوالي:}$$

$$ل^{(2)} = ل^{(1)} = ل^{(0)} = ل, ل^{(3)} = ل^{(2)} = ل^{(1)} = ل^{(0)} = ل, \dots, ل^{(n)} = ل^{(n-1)} = \dots = ل^{(0)} = ل$$

$$ع^{(2)} = ع^{(1)} = ع^{(0)} = ع, ع^{(3)} = ع^{(2)} = ع^{(1)} = ع^{(0)} = ع, \dots, ع^{(n)} = ع^{(n-1)} = \dots = ع^{(0)} = ع$$

إذا طبقنا دستور لايتز فإننا نلاحظ أن جميع حدوده معلومة إلا الحدود الثلاثة الأولى التي تحوي على الترتيب  $ل^{(n)}, ل^{(n-1)}, ل^{(n-2)}$  فيكون:

$$د^{(n)} = ل^{(n)} + ل^{(n-1)} + ل^{(n-2)} + \dots + ل^{(0)} = ل^{(n)} + ل^{(n-1)} + ل^{(n-2)} + \dots + ل^{(0)}$$

$$\text{ص } (٥) = ٢ \cdot ٥ + ٢ \cdot ٥ + \left[ \frac{(١-٥)٥}{٤} + ٥ + ٥ + ٥ \right] \text{ إذا بدلنا في هذه العلاقة نـ بـ } ٥٠$$

فإننا نجد المشتق ذا المرتبة الخمسين

$$\text{ص } (٥٠) = ٢ \cdot ٥٠ + ٢ \cdot ٥٠ + \left[ \frac{(٤٩)٥٠}{٤} + ٥٠ + ٥٠ + ٥٠ \right]$$

١١- تعرف كثيرات حدود (لوجاندر Legendre) بالعلاقة:

$$y_n(x) = \left[ \frac{1}{2^n} (1-x^2) \right]^{(n)}$$

أي المشتق ن المرتبة ن للقوة  $(1-x^2)^n$

برهن صحة العلاقتين:

$$(١) \quad y_n(x) = (1-x^2)^n \Rightarrow y_n'(x) = -2nx(1-x^2)^{n-1} = -2n y_{n-1}(x)$$

$$(٢) \quad y_n(x) = (1-x^2)^n \Rightarrow y_n''(x) = -2n y_{n-1}'(x) = -2n(-2(n-1)y_{n-2}(x)) = 2n(n-1)y_{n-2}(x)$$

الحل:

لنفرض التركيب  $(1-x^2)^{1+n}$  ولناخذ مشتقة من المرتبة ن+٢ بطريقتين:

أولاً: باعتباره مؤلفاً من جداء تابعين  $(1-x^2)^n$  و  $(1-x^2)$  ولنطبق من أجل

ذلك دستور لايبنتز فنجد:  $[(1-x^2)^n (1-x^2)]^{(n+2)} = (1-x^2)^n =$

$$[(1-x^2)^n]^{(n+2)} + (1-x^2)^{(n+1)} \cdot 2(1-x^2) = (1-x^2)^n + 2(1-x^2)^{n+1}$$

$$[(1-x^2)^n]^{(n+2)}$$

وإذا ذكرنا تعريف كثير حدود لوجاندر فإن هذه العلاقة تأخذ الشكل:

$$(٣) \quad y_n(x) = (1-x^2)^n \Rightarrow y_n''(x) = 2n(n-1)y_{n-2}(x) + 2ny_{n-1}'(x)$$

ثانياً: بأن نشق مرة واحدة مباشرة بالنسبة لـ  $s$  ثم نشق من المرتبة  $(n+1)$  بتطبيق دستور لايتز فيكون:

$$\begin{aligned} (s-1)^{n+1} &= (s-1)^n (s-1) = (s-1)^n (s-1) \\ &= (s-1)^n (s-1) = (s-1)^n (s-1) \\ &= (s-1)^n (s-1) = (s-1)^n (s-1) \\ &= (s-1)^n (s-1) = (s-1)^n (s-1) \end{aligned}$$

طريقة ثانية: لنفرض  $d = (s-1)^n$  ثم نأخذ المشتق اللوغاريتمي للطرفين فنجد:

$$\frac{d}{ds} (s-1)^n = n(s-1)^{n-1}$$

$$\frac{d}{ds} (s-1)^n = n(s-1)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (s-1)^n &= n(s-1)^{n-1} \\ \frac{d}{ds} (s-1)^n &= n(s-1)^{n-1} \\ \frac{d}{ds} (s-1)^n &= n(s-1)^{n-1} \end{aligned}$$

لبرهان العلاقة (٢) نطبق لايتز على  $s+1$  بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} (s+1)^n &= (s+1)^n \\ (s+1)^n &= (s+1)^n \\ (s+1)^n &= (s+1)^n \end{aligned}$$

واستناداً إلى تعريف  $y_n$  (س) يمكننا أن نكتب:

$$(5) \quad y_{n+1} = (س) = (س^2 - 1) y_n + (س) + 2(1 + n) س y_n + (س) + n(1 + n) [(س^2 - 1)^n]^{(1-n)}$$

من جهة ثانية يمكننا أن نشق مرة واحدة ثم نطبق دستور لايبز على  $y_{n+1}$  (س) بالشكل التالي:

$$[(س^2 - 1)^{1+n}]^{(1+n)} = [(س^2 - 1)^n]^{(1+n)} + 2[(س^2 - 1)^n]^{(1+n)} + [(س^2 - 1)^n]^{(1+n)}$$

$$(6) \quad y_{n+1} = (س) = 2(1 + n) س y_n + (س) + 2(1 + n) [(س^2 - 1)^n]^{(1-n)}$$

لنضرب العلاقة (5) بـ (2) ومن ثم تطرح العلاقة (6) منها فنجد:

$$(7) \quad y_{n+1} = (س) = 2(س^2 - 1) y_n + (س) + 2(1 + n) س y_n + (س)$$

$$\text{ولكن: } y_n = (س) = [(س^2 - 1)^n]^{(1+n)} = [(س^2 - 1)^n]^{(1+n)} = [(س^2 - 1)^n]^{(1+n)}$$

$$2[(س^2 - 1)^n]^{(1+n)} + 2[(س^2 - 1)^n]^{(1+n)} + 2[(س^2 - 1)^n]^{(1+n)}$$

$$y_n = (س) = 2[(س^2 - 1)^n]^{(1+n)} + 2[(س^2 - 1)^n]^{(1+n)} + 2[(س^2 - 1)^n]^{(1+n)}$$

ولكن استناداً إلى العلاقة (7) نجد:

$$y_{n+1} = (س) = 2(س^2 - 1) y_n + (س) + 2(1 + n) س y_n + (س)$$

$$2(1 + n) س y_n + (س)$$

$$y_{n+1} = (س) = 2(س^2 - 1) y_n + (س) + 2(1 + n) س y_n + (س)$$

$$1. (س) + 2(1 + n) س y_n + (س) وإذا بدلنا في العلاقة (7)  $n$  بـ  $n-1$$$



## تمارين للحل

احسب المشتقات التوابع: (١-١)

$$١٢ - \text{من}^3 (١ - \text{من}^2) - ١٣ \frac{\text{من}}{١ - \text{من}^2} - ١٤ \frac{\text{من} + \text{من}^2}{١ + \text{من} + \text{من}^2}$$

$$-١٥ - ١٦ \frac{1}{2} (\text{من} - ١) - ١٧$$

$$\text{هـ} \text{ من}^3 (٢ + \text{من}^2) \quad \text{لو} \frac{1 + \sqrt{1 + \text{من}^2} - \sqrt{1 + \text{من}^2}}{\text{من}}$$

$$-١٨ - \frac{1}{\sqrt{1 + \text{من}^2}} \text{لو} \frac{1 + \text{من}^2 + \sqrt{1 + \text{من}^2}}{1 + \sqrt{1 + \text{من}^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \text{من}^2}} \text{قوس ظا} \frac{\text{من}}{\sqrt{1 + \text{من}^2}}$$

١٩- برهن أن كلا من التابعين هـ<sup>١</sup> جاب<sup>١</sup> من. هـ<sup>٢</sup> جتاب<sup>١</sup> من يحقق العلاقة:

$$\text{من}^2 - ٢ \text{من} + (١ + \text{ب}^2) \text{من} = ٠$$

٢٠- برهن أن التابع:  $\frac{\text{جاب}(\text{م قوس جتاب})}{1 - \text{من}^2}$  يحقق المعادلة:

$$(\text{من}^2 - ١) \text{من}^3 + ٣ \text{من}^2 - (\text{م} - ١) \text{من} = ٠$$

$$٢١ - \text{من} = (\text{لو من})^3 \quad ٢٢ - \text{من} = (\text{جام من})^3 \quad ٢٣ - \text{من} = \text{من}^3$$

٢٤- احسب المشتقات من التربة ن للتابعين من هـ<sup>١</sup>، هـ<sup>٢</sup>

٢٦- احسب قيم التوابع القطعية من أجل من = ٠ و من = ٢ تحقق من صحة الدساتير التالية:

$$٢٧- \text{ظا (قطع)س} \pm \text{ظا (قطع)ص} = (\text{س} \pm \text{ص}) \text{ظا (قطع)س} \pm ١ \text{ظا (قطع)ص}$$

$$٢٨- \text{ظتا (قطع)س} \pm \text{ظتا (قطع)ص} = (\text{س} \pm \text{ص}) \text{ظتا (قطع)س} \pm ١ \text{ظتا (قطع)ص}$$

$$٢٩- \text{جا (قطع)} \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\text{جتا (قطع)}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{جتا (قطع)}}{2} \right) \pm \frac{1}{2}$$

$$٣٠- \text{جتا (قطع)} \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\text{جتا (قطع)}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{جتا (قطع)}}{2} \right) \pm \frac{1}{2}$$

احسب مشتقات التوابع التالية: (١ - ٢)

$$١- \text{ص} = \text{جتا (قطع)س} - ٣ \quad ٢- \text{ص} = \text{جا (قطع)س} - ١$$

$$٣- \text{ص} = \text{جتا (قطع)س} - ٤ \quad ٤- \text{ص} = \text{قا (قطع)س} - ١$$

$$٥- \text{ص} = \text{ظا (قطع)س} - ١ \quad ٦- \text{ص} = \text{جتا (قطع)س} - ٢$$

$$٧- \text{ص} = \text{جتا (قطع)س} - ٨ \quad ٨- \text{ص} = \text{جا (قطع)س} - ٤$$

$$٩- \text{ص} = \text{ظا (قطع)س} - ٩ \quad ١٠- \text{ص} = \text{لوظا (قطع)س} - \frac{1}{2}$$

$$١١- \text{ص} = \text{لو جتا (قطع)س} - ١٢ \quad ١٢- \text{ص} = \text{لوجا (قطع)س} - ١٢$$

برهن صحة العلاقات التالية:

$$١٣- \cos \theta = \sin \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$١٥- \cos \theta = \sin \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{3}$$

احسب مشتقات التوابع التالية:

$$١٧- \sin \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$١٩- \cos \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$٢١- (\sin \theta)^3 \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{4}$$

٢٣- احسب المشتق ذا الرتبة الأربعين للتابع  $\sin \theta$  حيث  $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$٢٤- إذا فرضنا:  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  برهن أن  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$$

♦ احسب مشتقات التوابع التالية:

$$٢٥- \sin \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$٢٦- \cos \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$٢٧- \sin \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$٢٨- \cos \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$٢٩- \sin \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$٣٠- \cos \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$٣١- \sin \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$٣٢- \cos \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$٣٣- \sin \theta \quad \text{حيث } \theta = \frac{\pi}{4}$$

أوجد ميل المماس للمنحنيات المعرفة بالمعادلات التالية في النقاط

المبينة بجانب كل منها:

$$-34 \quad \text{ص} = 25\sqrt{7} - 2 : (4, 3), (3, 4)$$

$$-35 \quad \text{ص} = (3 - 2\sqrt{3})^2 : (2, 4), (1, 20), \left(\frac{3}{64}, \frac{81}{64}\right)$$

$$\text{ص} = \frac{3}{9 - 2\sqrt{3}} : \left(\frac{15}{4}, 5\right)$$

احسب المشتقات من المرتبة الثانية للتوابع التالية:

$$-36 \quad \text{ص} = \sqrt{4 - 2} \quad -37 \quad \text{ص} = (4 + \sqrt{7})^2$$

$$-38 \quad \text{ص} = (1 + \sqrt{7})^2$$

\* احسب المشتق من المرتبة ن للتوابع التالية حيث نفرض  $N < 1$ :

$$-39 \quad \text{ص} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \quad -40 \quad \text{ص} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

♦ احسب مشتقات التوابع المعرفة بالعلاقات التالية حين نعتبر س

متحولاً مستقلاً:

$$-41 \quad \text{ص} = 4 - \sqrt{3} \quad -42 \quad \text{ص} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 16 = 0$$

$$-43 \quad \text{ص} = 9 + \sqrt{2} \quad -44 \quad \text{ص} = 32 - \sqrt{3}$$

$$-45 \quad \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{1} = 1 \quad -46 \quad \text{ص} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 = 0$$

-47 احسب المشتقات من الرتبة الثانية للتوابع التي يحويها التمرين السابق.

-48 احسب ميل مماس المنحنيات المعرفة بالمعادلات التالية في النقاط المبينة

بجانب كل منها.

$$(٠,٠) \quad ٠ - ٤٩ = ٢ص + ٢ص - ٢ص - ٢ص - ٢ص - ٢ص - ٢ص - ٢ص = ٠$$

$$(٢,٣) \quad ٠ - ٥٠ = ٢ص - ٢ص - ٢ص - ٢ص - ٢ص - ٢ص - ٢ص - ٢ص = ٠$$

$$\left(\frac{٨-}{٥}, ٤\right) \quad ٠ - ٥٢ = \frac{٢ص}{٩+٢ص} \quad (١,٦) \quad ٠ - ٥١ = \frac{٤+ص}{٨+٢ص}$$

احسب مشتقات التوابع التالية:

$$٥٣ - ص = ظا(٢ص) \quad ٥٤ - ص = جا\left(\frac{\pi}{3} + ص\right)$$

$$٥٥ - ص = جا٣ص \quad ٥٦ - ص = ظا٣ص$$

$$٥٧ - ص = ٢ظا٢ص \quad ٥٨ - ص = ٢جا٢ص$$

$$٥٩ - ص = جا٣ظا٣ص \quad ٦٠ - ص = ظا٢ص - ٣ص$$

$$٦١ - ص = ٢جا٢ص - ٤ص \quad ٦٢ - ص = \frac{جا٢ص}{٢ص}$$

$$٦٣ - ص = \frac{جتا٣ص}{٤ص} \quad ٦٤ - ص = \frac{١}{ص} ظتا٢ص$$

$$٦٥ - ص = \frac{١ - ظا٢٢ص}{ظا٢ص} \quad ٦٦ - ص = ص(١ + ظتا٣ص)$$

$$٦٧ - ص = \sqrt{١ + جا٣ص} \quad ٦٨ - ص = جا٢ص$$

$$٦٩ - ص = \frac{جا٣ص}{١ + جا٣ص} \quad ٧٠ - ص = (١ - جتا٤ص) \sqrt[٢]{}$$

احسب مشتقات التوابع التالية: (١ - ٣) :

$$١ - ص = قوس جتا\left(\frac{٣ص}{٤}\right) \quad ٢ - ص = قوس جا\left(\frac{ص}{٥}\right)$$

$$٣ - ص = قوس جا٤ص \quad ٤ - ص = \frac{١}{١} قوس ظتا\frac{١}{١}$$

$$٦- \text{ص} = \text{قوس جتا م}$$

$$٨- \text{ص} = \text{قوس ظل م} \frac{1}{\text{م}}$$

$$١٠- \text{ص} = \text{قوس ظل م} \frac{2}{\text{م}}$$

$$١٢- \text{ص} = \text{قوس جاس م}^2$$

$$١٤- \text{ص} = \text{قوس قاس م}^2$$

$$٥- \text{ص} = \text{قوس ظل م}^2$$

$$٧- \text{ص} = \text{قوس جاس م}^2 - 1$$

$$٩- \text{ص} = \text{قوس جتا م} \frac{1}{3}$$

$$١١- \text{ص} = \text{قوس جا م} \frac{2}{1-\text{م}}$$

$$١٣- \text{ص} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ قوس ظل م} \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ م}$$

$$١٥- \text{ص} = \text{قوس ظل م} \left( \frac{3}{5} \right)$$

احسب مشتقات التوابع التالية:

$$١٧- \text{ص} = \text{لو} (٣\text{م} + ٧)$$

$$١٩- \text{ص} = \text{لو} (٤\text{م}^2 + ١)$$

$$٢١- \text{ص} = \text{لو} (٨ - ١٥\text{م})$$

$$٢٣- \text{ص} = \text{لو} (٥\text{م} + ١)$$

$$٢٥- \text{ص} = \text{لو ظل م} \left( \frac{\pi}{4} + \text{م} \right)$$

$$٢٧- \text{ص} = \text{لو جاس م}$$

$$٢٩- \text{ص} = \text{لو ظل م} \frac{3}{4}$$

$$٣١- \text{ص} = \text{لو} (٣ \text{ جتا م})$$

$$٣٣- \text{ص} = \text{لو} [(١ + \text{م})]$$

$$٣٥- \text{ص} = \frac{\text{لوس}}{\text{م}}$$

$$١٦- \text{ص} = \text{لو م}^5$$

$$١٨- \text{ص} = \text{لو} (٢ - \text{م})$$

$$٢٠- \text{ص} = \text{لو} (٩ - ٢\text{م})$$

$$٢٢- ٥ = \text{لو} (٤ - \text{ك})^2 (٣ + \text{ك})^2$$

$$٢٤- ٢٤ - \text{ص} = \text{لوس م}^2 (١ + ٣\text{م})$$

$$٢٦- ٢٦ - \text{ص} = \text{لو جتا م}^3$$

$$٢٨- \text{ص} = \text{لو} ٢ \text{ جاس م}^3$$

$$٣٠- \text{ص} = \text{لو قاس م} \frac{1}{3}$$

$$٣٢- \text{ص} = \sqrt{\text{لوس م}}$$

$$٣٤- \text{ص} = \text{لو} \left( \frac{١ - \text{جاس م}}{١ + \text{جاس م}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$٣٧- ص = (٤ + ٢ ص) (٩ - ٢ ص)$$

$$٣٦- ص = \frac{لو جتا ص}{جتا ص}$$

$$٣٩- ص = (٦ - ٢ ص) (٧ + ١ ص)$$

$$٣٨- ص = (٣ + ص) (١ - ص)$$

$$٤١- ص = \frac{٢(١ + ص)}{٢(٣ - ص)}$$

$$٤٠- ص = (٥ + ٢ ص) (١ - ٣ ص)$$

٤٣- احسب المشتقة من الرتبة ن للتابع ص = لوس

$$٤٢- ص = \frac{٥ - ٢ ص}{٢(٩ - ٢ ص)}$$

احسب مشتقات التوابع التالية باخذ لو غاريتم الطرفين:

$$٤٥- ص = ١٠ ص ٢ هـ$$

$$٤٤- ص = \frac{٢ ص}{٢ هـ}$$

$$٤٧- ص = ٣ ص هـ$$

$$٤٦- ص = ٣ هـ$$

$$٤٩- ص = ٣ ص هـ$$

$$٤٨- ص = ٣ ص هـ$$

$$٥١- ص = ٣ ص هـ$$

$$٥٠- ص = ٣ ص هـ$$

$$٥٣- ص = ٣ ص هـ جتا ٣ ص$$

$$٥٢- ص = ٣ ص لوس هـ$$

$$٥٥- ص = ٣ ص قوس جا هـ$$

$$٥٤- ص = ٣ ص لوس هـ$$

$$٥٧- ص = ٣ ص هـ$$

$$٥٦- ص = ٣ ص قوس قا هـ$$

٥٩- احسب المشتق من الرتبة ن

$$٥٨- ص = (لوس ص)$$

للتابع ص هـ

$$٦١- جتا (قطع) (٣ - ص)$$

$$٦٠- جتا (قطع) \frac{ص}{٢}$$

$$٦٣- ص هـ ظا (قطع) ص$$

$$٦٢- ص هـ ظا (قطع) \frac{١ - ص}{٥}$$

$$٦٥- لو جتا (قطع) ص$$

$$٦٤- جتا (قطع) ص هـ$$

$$٦٧- \text{لو ظنا (قطع)} \frac{\text{من}}{٧}$$

$$٦٦- \text{لوظا (قطع)} \frac{\text{من}}{٧}$$

الأجوبة:

$$٢٨- \frac{-(٢٢\text{من} + \text{ب})}{٢} \frac{٣}{(٢\text{من} + ٢\text{ب} + \text{ج})^٢}$$

$$٢٦- ٣\text{من} ٢\text{من} ٩ + ٢$$

$$٣١- \frac{٢(١-د)^٣}{١-٢(١-د)^٢}$$

$$٢٩- ٣\text{من} ٢(١+٢\text{من} ٢) ٢\text{من} ١ + ٢$$

$$٣٤- \frac{٤-}{٣}, \frac{٣-}{٤}$$

$$٣٢- \frac{١}{٢\text{من} ١ - ٢\text{من} ١ + ٢\text{من} ١ - ٢\text{من} ١}$$

$$٣٧- \frac{٢}{٧ + ٤\text{من}}$$

$$٣٥- \frac{٢٧-}{٦٤}$$

$$٤٠- \frac{١(١-)}{١+٥(١-من)}$$

$$٣٨- ٢\text{من} (٧٠ + ٢\text{من} ٨٤ + ٣)$$

$$٤٣- \frac{٤-من}{٩\text{من}}$$

$$٤١- \frac{٢}{من}$$

$$٤٥- \frac{٢\text{ب}-}{١\text{من}}$$

$$٤٤- \frac{من-}{من}$$

$$٥١- \frac{١-}{١٥}$$

$$٤٩- \frac{٣}{٤}$$

$$٥٦- \frac{١٢\text{جا} ٣\text{من}}{\text{جتا} ٣\text{من}}$$

$$٥٣- ٢\text{من} \text{فتا} (٢\text{من})$$

$$٦٤- \frac{\text{ظنلن}}{٧\text{من}} (٢\text{من} \text{جتا} \text{فتا} + \text{ظنلن})$$

$$٥٨- \text{ظنا من} \text{فتا من} + \text{جا من}$$

$$٦٦- (١ + \text{ظنلن}) (١ + \text{ظنلن} - ٣\text{من} \text{جتا} \text{ظنلن})$$

$$٦٢- \frac{٢\text{جا من} (من \text{جتا من} - \text{جا من})}{٧\text{من}}$$

$$٣- \frac{٤}{٢ - ١٦\text{من}}$$

$$٧٠- ٦\text{جا} ٤\text{د} - ١\text{جتا} ٤\text{د}$$

$$-5 \frac{2}{3} \text{ من } 1$$

$$-7 \frac{3}{4} \text{ من } 2 - 1$$

$$-9 \frac{7}{8} \text{ من } (3 + 2)$$

$$-10 \frac{2}{3} \text{ من } 4$$

$$-13 \frac{2}{7} \text{ من } 2$$

$$-14 \frac{3}{4} \text{ من } 1$$

$$-16 \frac{1}{2} \text{ من } 1$$

$$-18 \frac{1}{2} \text{ من } 2$$

$$-20 \frac{3}{4} \text{ من } 9$$

$$-24 \frac{10}{11} \text{ من } 5$$

$$-26 \frac{3}{4} \text{ من } 3$$

$$-27 \text{ من } 3$$

$$-31 \frac{1}{2} \text{ من } 3 \text{ من } 3$$

$$-38 \frac{1}{2} \text{ من } (7 + 5) \text{ من } (3 + 1)$$

$$-40 \frac{9}{10} \text{ من } 5 \text{ من } 3 \text{ من } 1$$

$$-42 \frac{1}{2} \text{ من } (5 - 2) \text{ من } (1 + 3 + 5 + 7 + 9)$$

$$-43 \frac{1}{2} \text{ من } (1 - 1) \text{ من } (1 - 1)$$

$$-45 \frac{1}{2} \text{ من } 10$$

$$-47 \frac{3}{4} \text{ من } 3$$

$$-49 \frac{1}{2} \text{ من } 3 \text{ من } 3$$

$$-53 \frac{1}{2} \text{ من } (2 \text{ من } 3 \text{ من } 3 \text{ من } 3)$$

$$-55 \frac{2}{3} \text{ من } 1 \text{ من } 1$$



$$-57 \quad 3 \text{ من } 3^3 (1 + \text{لوس})$$

$$-56 \quad \frac{1}{1 \text{ من } 3^3}$$

$$-58 \quad (1 + \text{لوس}) \cdot \text{لو لوس} [ \text{لوس} ]^3$$

$$-59 \quad 3 \text{ من } 3^3 (1 + \text{ن})$$

$$-61 \quad 3 \text{ جا } (3 - 1) \text{ من } 3$$

$$-60 \quad \frac{1}{2} \text{ جتا } (3 \text{ من } 3)$$

$$-63 \quad 3 \text{ من } 3^3 (3 \text{ من } 3) \text{ جتا } (3 \text{ من } 3)$$

$$-62 \quad \frac{1}{5} \text{ جتا } (3 \text{ من } 3) \left( \frac{1 - 16}{5} \right)^3$$

$$-65 \quad 3 \text{ من } 3^3 (3 \text{ من } 3)$$

$$-64 \quad 3 \text{ من } 3^3 (3 \text{ من } 3)$$

$$-66 \quad \frac{1}{3 \text{ من } 3^3}$$





## مجموعات الأعداد

## Sets Of Numbers



## الفصل الخامس

### مجموعات الأعداد

#### Sets Of Numbers

#### مجموعة الأعداد الطبيعية Set of Natural Numbers

مجموعة الأعداد الطبيعية هي أول بناء عددي يقابله الإنسان والتي تمثل في النظام  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

أول من أنشأ الأعداد الطبيعية على أساس بديهيات سميت باسمه هو العالم الإيطالي بيانو (Peano) وذلك في نهاية القرن التاسع عشر.

#### بديهيات بيانو (Peano Axioms)

مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة من العناصر تتصف بما يلي:

- (١) تحتوي هذه المجموعة على عنصر يرمز له بالرمز ١.
- (٢) لكل عنصر في هذه المجموعة عنصر واحد فقط لاحق له.
- (٣) العنصر ١ ليس لاحقاً لأي عنصر في هذه المجموعة.
- (٤) إذا كان أ، ب عنصرين في هذه المجموعة، فإن لاحقاً يختلف عن لاحق ب.

(٥) أي مجموعة جزئية من هذه المجموعة تحتوي على العنصر أو تحتوي أيضاً على اللاحق لأي عنصر من عناصرها، فإن هذه المجموعة الجزئية لا بد أن تكون المجموعة بكاملها.

من الخواص الجبري لمجموعة الأعداد الطبيعية ما يلي:

(أ) الجمع

إذا كان  $a, b \in \mathbb{N}$ ، فإن هناك عملية ثنائية تسمى الجمع  $(+)$  على  $\mathbb{N}$  تتصف بالخواص التالي:

$$(1) a + b = b + a$$

$$(2) a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$(3) a + 0 = 0 + a = a$$

(ب) الضرب

إذا كان  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ، فإن هناك عملية ثنائية تسمى الضرب  $(\cdot)$  على  $\mathbb{N}$  تتصف بالخواص التالي:

$$(1) a \cdot b = b \cdot a$$

$$(2) a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(3) a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

(ج) الترتيب

إذا كان  $a, b \in \mathbb{N}$ ، فإن

$$a = b \text{ أو } a < b \text{ أو } a > b$$

هناك بعض الصفات التي لاتصف بها مجموعة الأعداد الطبيعية ومنها:

(أ) عملية الطرح غير مغلقة على الأعداد الطبيعية، بمعنى أن إذا كان  $a, b \in \mathbb{N}$ ،

ب  $\exists$  ط، فإن  $\neg$  ب ليس من الضروري أن يكون عدد طبيعي.

(ب) عملية القسمة غير مغلفة على الأعداد الطبيعية بمعنى أنه إذا كان

أ، ب  $\exists$  ط و ب  $\neq 0$ ، فإن  $\frac{أ}{ب}$  قد لا يكون عدد طبيعياً.

(ج) قد لا يكون هناك حل في مجموعة الأعداد الطبيعية للمعادلات،

فمثلاً لا يوجد عدد طبيعي س حيث أن  $س + ٤ = ٢$

هذه العيوب كانت السبب في التفكير في وجود أعداد طبيعية سالبة-

{-١، -٢، -٣، ...}.

ولكن بين الأعداد الطبيعية والأعداد الطبيعية السالبة لا بد من وجود

نقطة تعادل، وهذا ما يسمى بالصفر.

مجموعة الأعداد الطبيعية وسالبها والعدد صفر كلها تكون مجموعة

الأعداد الصحيحة، ويرمز لذلك بالرمز ص،  $\{0 \pm ١ \pm ٢ \pm \dots\}$

$\pm ٣ \pm \dots$ .

في بعض الأحيان تسمى مجموعة الأعداد الطبيعية، مجموعة الأعداد

الصحيحة الموجب ص + هناك صفة حميدة تنصف بها مجموعة الأعداد

الصحيحة ص تساعد في حل المعادلات، هذه الخاصية هي خاصية الحذف أو

الاختصار في حالة الجمع.

الاختصار

إذا كان أ، ب، ج  $\exists$  ص فإن  $أ + ب = ج$  يؤدي إلى أن  $ب = ج - أ$

من البديهيات التي تحتاجها في بناء الكثير من الاستنتاجات حول الأعداد  
بديهية تسمى مبدأ الترتيب الجيد (Well - Ordering Principle)

مبدأ الترتيب الجيد

كل مجموعة جزئية غير خالية  $E$  من  $\mathbb{N}$  لها عنصر أصغر

من الاستنتاجات الرئيسية التي بنيت على مبدأ الترتيب الجيد مبدأ  
الاستقراء الرياضي

مبرهنة:

نظرية ١ (مبدأ الاستقراء الرياضي)

لنفرض أن  $E$  مجموعة جزئية غير خالية من  $\mathbb{N}$  تتصف بما يلي:

$$1 \in E$$

(ب) إذا كان العدد الصحيح الموجب  $k$  في  $E$ ، فإن  $k+1$  في  $E$  عندئذ

$$E = \mathbb{N}$$

البرهان:

لنفرض أن  $K$  هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تنتمي إلى  $E$   
والمطلوب الآن أن نبرهن أن

$$K \neq \emptyset$$

من مبدأ الترتيب الجيد يستتبع أن هناك عنصر أصغر  $k_1$  في  $K$  وهذا  
العنصر أكبر من ١ لأن  $1 \in E$

من الملاحظ أن ك - ١ عدد صحيح موجب وأنه أصغر من ك، وهذا يعني أن ك - ١ في ع من الفرض نجد أن ك = ١ + (١ - ١) في ع، وهذا يناقض الفرض. إذن ك = ٠ وهذا يوصلنا إلى أن ع = ص +.

عند استخدام مبدأ الاستقراء الرياضي في برهن جملة ي (ن) تتبع ما يلي:

(١) نبرهن الجملة في حالة ن = ١، أي صحة ي (١).

(٢) نبرهن صحة الجملة ي (ج + ١) باستخدام صحة الجملة ي (ج) حيث ج عدد صحيح موجب

مثال ١:

برهن أن

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

الحل:

$$\frac{(1+1)}{2} = 1 \text{ هي } (١) \text{ هي من الواضح أن ي (١) هي } (١+١)$$

وهذه جملة صحيحة

إذا كانت ي (ن) جملة صحيحة، فإن ذلك يعني أن:

$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k$$

برهنة هذه الجملة لكل الأعداد الموجبة ن لا بد من برهن ي (ك + ١)



$$(1+k) + (k + \dots + 2 + 1) = (1+k) + k + \dots + 2 + 1$$

$$1+k + \frac{k(k+1)}{2} =$$

$$\left[ (1+k)2 + (1+k)k \right] \frac{1}{2} =$$

$$(2+k)(1+k) \frac{1}{2} =$$

وهذا يوضح صحة الجملة ي (ك + ١)

هذا يعني أن ي (ن جملة صحيحة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة ن ≤ ١



## تمارين

(١) إذا كان  $n$  حيث  $n$  عدداً طبيعياً يعني  $1 = 1, 1 = 1, 1 = 1, \dots$

فبرهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن  $(1 + n)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \dots + 1$

(٢) برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(٣) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(٤) برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(٥) برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(٦) إذا كانت  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  متتالية حيث أن  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, \dots$

فبرهن أن  $x_n \leq 1$  لكل  $n$ .

$$(1) \quad x_n > \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad \text{لكل } n \leq 1$$

$$(ب) \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 - x_{n+1} \quad \text{لكل } n \leq 1$$



$$(ج) \sum_{i=1}^n \epsilon_i = 1 - \epsilon_n \quad \text{لكل } n \geq 1$$

$$(د) \sum_{i=1}^n \epsilon_i = 1 - \epsilon_{n+1}$$

(٧) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن

$$\left[ \frac{n(n+1)}{2} \right] = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

(٨) برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن

$$\frac{n}{1+n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

(٩) لفرض أن  $\frac{n+2}{6} = m$ ،  $m-1 = n-1$ ،  $m = n$ ،  $m+1 = n+1$  برهن أن

(١)  $m = n$  عدد صحيح (ب)  $m = n$  عدد صحيح

(١٠) إذا كان  $m = n$ ، فبرهن أن

$$(m+1) \leq n+1$$

حيث  $n$  عدد صحيح موجب

### قابلية القسمة Divisibility

من النتائج الرئيسية في نظرية الأعداد نتيجة تسمى خوارزمية القسمة والتي تنص على أنه يمكن قسمة عدد صحيح إلى عدد صحيح آخر للحصول على باقي أصغر.



برهان هذه الحقيقة يعتمد على مبدأ الترتيب الجيد.

مبرهنة (خوارزمية القسمة):

إذا كان  $a$ ،  $b$  عدنان صحيحان حيث  $b < 0$ ، فإن هناك عدنان صحيحان  $q$ ،  $r$  حيث  $0 \leq r < |b|$  و  $a = bq + r$

البرهان:

لتفرض أن

$$S = \{a - qb : q \text{ عدد صحيح}\}$$

نبرهن أن  $S$  تحتوي على أعداد صحيحة موجبة

إذا كان  $a$  كبير بما فيه الكفاية وسالب، فإن  $a - qb < 0$ .

$$\text{لتفرض أن } f = \{a - qb : 0 \leq f\}$$

المجموعة  $f$  تحتوي على عنصر أصغر  $r$  (من مبدأ الترتيب الجيد)

ونلاحظ أن  $0 \leq r$ ،  $a - qb = r$  لبعض  $q$  ندعي بأن  $r < |b|$

لتفرض عكس ذلك، أي أن  $r \geq |b|$ ،  $a - qb \leq r$

ومن ذلك  $a - (q+1)b \leq r$  هذا يعني أن  $a - (q+1)b$  في المجموعة  $f$ ،

ولكن  $a - (q+1)b < a - qb = r$  وهذا يناقض كون  $r$  عنصر أصغر في  $f$

يمكن توضيح وحدانية العدنان  $q$ ،  $r$  في النظرية السابقة كما يلي: لتفرض

أن هناك  $q_1$ ،  $r_1$  حيث  $0 \leq r_1 < |b|$ ،  $a = bq_1 + r_1$

$$| \text{ر} - \text{ر}^* | = | \text{ل} - \text{ل}^* |$$

من النظرية لدينا  $0 \leq \text{ر} > \text{ب}$  وهذا يعني أن  $\text{ب} > \text{ر} \geq 0$  وجميع ذلك مع المتباين  $0 \leq \text{ر}^* > \text{ب}$  يعطي  $\text{ب} > \text{ر} > \text{ر}^*$  وهذا يعني أن  $| \text{ر} - \text{ر}^* | > \text{ب}$  إذن  $| \text{ل} - \text{ل}^* | > \text{ب}$  وهذا يعني أن  $0 \leq | \text{ل} - \text{ل}^* | > \text{ب}$

وحيث أن:

$$| \text{ل} - \text{ل}^* | \text{ عدد صحيح غير سالب، فإن ذلك يعني أن } \text{ل} - \text{ل}^* = 0$$

$$\text{ومن ذلك } \text{ل} = \text{ل}^* \text{ والذي بدوره يعني أن } \text{ر} = \text{ر}^*$$

عند قسمة عدد صحيح على آخر غير صفري قد لا تكون النتيجة عدد صحيح، ولكن قد يكون اهتمامنا أكثر تركيزاً على الحالة التي يكون خارج قسمة عددين صحيحين عدد صحيح.

إذا  $\text{ا}$ ،  $\text{ب}$  عددين صحيحين حيث  $\text{ب} \neq 0$ ، وكان  $\text{ج} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$  أو  $\text{ا} = \text{ب} \times \text{ج}$  حيث  $\text{ج}$  عدد صحيح فإن  $\text{ب}$  يسمى قاسم (divisor) للعدد  $\text{ا}$  أو يسمى  $\text{ا}$  عامل (factor) للعدد  $\text{ب}$ ، يسمى العدد  $\text{ا}$  مضاعف (multiple) للعدد  $\text{ب}$   $\text{ا}$  يسمى قابل للقسمة (divisible) على العدد  $\text{ب}$ .

تعريف: إذا كان  $\text{ا}$ ،  $\text{ب} \in \mathbb{Z}$ ، و  $\text{ا} \neq 0$ ، فإن العدد الصحيح  $\text{ا}$  يسمى قاسم (divisor) العدد  $\text{ب}$  بشرط وجود عدد صحيح وحيد  $\text{ج}$  حيث  $\text{ب} = \text{ا} \times \text{ج}$ .

رمزياً  $\text{ا} \mid \text{ب}$  قاسم  $\text{ب}$  تكتب على الشكل  $\text{ا} \mid \text{ب}$ ،  $\text{ا}$  لا يقسم  $\text{ب}$  تكتب على شكل  $\text{ا} \nmid \text{ب}$ .

هناك أسماء أخرى تطلق على خاصية قابلية القسمة ومنها (٢) ب تعني أن ٢ عامل على من عوامل العدد ب وكذلك تعني أن ب قابل للقسمة على العدد ٢، أو أن ب مضاعف للعدد ٢)

من تعريف القاسم تلاحظ أن  $٢ \pm$  |  $١ \pm$ ،  $٢$  |  $٢$ ،  $٢$  |  $٠$  لكل عدد صحيح ٢، ومن الواضح أنه إذا كان  $٢$  |  $١ \pm$  فإن ذلك يعني  $٢ \pm = ١$

النظرية التالية توضح أهم الخواص الرئيسية لقابلية القسمة

#### مبرهنة

إذا كانت ٢، ب، جـ  $\geq ٣$  ص، فإنه

(١) إذا كان ٢ | ب، فإن ٢ | جـ | ب جـ

(٢) إذا كان ٢ | ب، ب | جـ، فإن ٢ | جـ

(٣) إذا كان ٢ | ب، ب | ٢، فإن  $٢ \pm = ٢$ .

(٤) إذا كان ٢ | ب، ٢ | جـ، فإن ٢ | (ب س + جـ ي)

لكل س، ي  $\geq ٣$  ص

البرهان:

استخدام التعريف مباشرة يوضح برهان الخواص ١، ٢، ٣، ولهذا السبب نتركها للقارئ ونبرهن الفقرة (٤) ٢ | ب يعني أن هناك عدد صحيح ك حيث  $٢ = ب ك$

٢ | جـ يعني أن هناك عدد صحيح م حيث  $٢ = م$

الآن إذا كان  $s \geq 3$ ، فإن

$$b = s - 1$$

وإذا كان  $s \geq 3$  فإن

$$j = s - 1$$

الآن

$$b = s + j - 1 = (s + s - 1)$$

لاحظ أن  $s + 1$  عدد صحيح، وهذا يعني أن  $1 \mid (b + s - j)$

إذا كان  $1, b \geq 3$ ، فإن العدد  $d$  يسمى قاسم مشترك (Common divisor) للعدين  $b, 1$  إذا كان  $d \mid b, d \mid 1$ .

من الواضح أن العدد  $1$  قاسم لكل عدد صحيح، ولهذا فإن مجموع القواسم المشتركة للعدين  $1, b$  مجموعة غير خالية، في هذا المجموعة قاسم مشترك له أهمية كبيرة وهو القاسم المشترك الأعظم للعدين  $1, b$ .

تعريف: إذا كان  $b, a$  عددان صحيحان حيث على الأقل أحدهما لا يساوي صفر، فإن القاسم المشترك الأعظم للعدين  $b, a$  ويرمز لذلك الرمز  $(a, b)$  هو العدد صحيح موجب  $d$  حيث:

$$(a, b) \mid a, (a, b) \mid b$$

(ب) إذا كان  $d \mid a, d \mid b$ ، فإن  $d \mid (a, b)$

من الواضح أن القاسم المشترك الأعظم (٢، ب) هو أكبر الأعداد الصحيحة في مجموعة القواسم المشتركة للعددين ب، ٢.

القاسم المشترك الأعظم (٢، ب) للعددين ٢، ب حيث أن أحدهما على الأقل لا يساوي صفر لا بد ٢، ن يكون وحيداً فإذا كان د، د كلاهما قاسم مشترك أعظم للعددين ٢، ب فإن د | د و د | د، ومن نظرية سابقة وضعنا أن  $d \mid \pm d$ ، ونظرة سريعة للتعريف توضح أن (٢، ب) لا بد أن يكون عدد صحيح موجب، أي أن  $d = ٢$ .

النظرية التالية توضح وجود القاسم المشترك الأعظم.

مبرهنة:

إذا كان ٢، ب  $\neq ٠$  ص حيث أحدهما على الأقل لا يساوي صفر فإن (٢، ب) موجود، وعلاوة على ذلك هناك عدنان صحيحان ي، س حيث (٢، ب) = أ ي + ب ي

البرهان:

لنفرض أن

$$E = \{ ٢ن + ب م : ن، م \in \mathbb{Z} \}$$

تحتوي على عدد غير صفري، لأن إذا كان  $٢ \neq ٠$ ، فإن  $| ٢ | = ٢ن + ٠م$  ب.. عندما نختار  $ن = ١$  أو  $ن = -١$

إذا كان س  $\in E$  و س  $> ٠$ ، فإن - س  $\in E$  لأنه:

$$\text{إذا كان س} = ٢ن + ب م، \text{ فإن - س} = ٢(-ن) + ب(-م)$$



إذا من مبدأ الترتيب الجيد يكون للمجموعة ع عنصر أصغري  $>$   
حيث  $<$

هذا يعني أن هناك س، ي  $\exists$  ص حيث  $د = أ + س + ب$  ي و أن  $د = (أ، ب)$   
ب) ولتوضيح ذلك نطبق خوارزمية القسمة، أي أن هناك عدنان صحيحان ر،  
ل حيث  $0 \leq ر < د$  و  $0 \leq ل < د$  و  $ر + ل = د$ .

وهذا يؤدي إلى أن

$$ر = د - ل = (أ + س + ب) - ل$$

$$= (أ - ل) + س + ب$$

وهذا يعني أن ر  $\exists$  ع والذي يناقض كون د عنصر أصغري في ع

إذن  $0 = ر$  وبذلك يكون د | و

بنفس النقاش يمكن توضيح أن د | ب، وهذا يعني أن د قاسم مشترك للعددين  
ب، أ إذا كان ج | أ وج | ب فإن ج | (أ + ب) يعني ذلك أن  
ج | د

$$إذن د = (أ، ب)$$

إذا كان لا يوجد للعدد الصحيح ب أي قاسم عددا العددين  $1 - 1$ ،  
والعدد ب نفسه، فانه يسمى عدد أولي (PRIME).

العدنان الصحيحان أ، ب (حيث على الأقل احدهما لا يساوي صفر)  
أوليان نسبيا

$$(CNETOTVELY PRIM). إذا كان فقط (أ، ب) = 1.$$





من النتائج المهمة التي تبني العلاقة بين القاسم المشترك الأعظم للعددان الصحيحان  $a$  و  $b$  وكونهما أوليا نسبيا النتيجة التالية.

مبرهنة:

إذا كان  $\text{ص } \text{gcd}(a, b) = 1$  ،  $b$  حيث على الأقل احدهما لا يساوي صفر، فإن  $a$  ،  
 $b$  أوليان نسبيا وإذا كان فقط هناك عددان صحيحان  $s$ ،  $t$  حيث أن  
 $a = bs + t$

البرهان:

إذا كان  $a$ ،  $b$  أوليان نسبيا، فإن  $(a, b) = 1$  ، وهذا يعني وجود  $s$ ،  $t$   
 $\text{ص } \text{gcd}(a, b) = 1$

أما بالعكس وهو إذا كان  $a = bs + t$  حيث  $s$ ،  $t$  عددان  
 صحيحان مناسبان وإذا كان  $(a, b) = d$  فإن  $d \mid a$  و  $d \mid b$  وهذا يعني أن  $d$   
 $\mid (bs + t)$  والذي بدوره إلى أن  $d \mid 1$ ، وحيث أن  $d$  عدد صحيح موجب،  
 فإن ذلك يعني أن  $d = 1$  والذي بدوره يعني أن  $a$ ،  $b$  أوليان نسبيا من المعروف  
 أنه إذا كان  $a \mid b$  فإن  $a \mid b$  لكل عدد صحيح  $k$ ، ولكن كون  $a \mid b$  ك  $b$   
 قد لا يؤدي إلى أن  $a \mid b$ ، ومع فإن النتيجة التالية توضح الشرط التي تؤدي إلى  
 صحة ذلك.

مبرهنة: إذا كان  $a$ ،  $b$  أوليان نسبيا وكان  $a \mid bs$  ، فإن  $a \mid s$

البرهان:

حيث أن  $(a, b) = 1$ ، فإن هناك عددان صحيحان  $s$ ،  $t$  يحققان  $a = bs + t$



+ ب ي = ١ بالقرب في جـ تحصل على جـ = جـ (١ س + ب ي) = ١ (جـ ي  
س) + (ب جـ) ي

من الواضح أن ١ | ١، ومن المعطى أن ١ | ب جـ وبذلك يكون ١ | جـ  
س + ب جـ ي وهذا يعني أن ١ | جـ

ومن النتائج التي يمكن أن تبني على هذه النظرية النتيجة التالية والتي يترك  
برهانها كتمرين للقارئ.

نتيجة (١):

إذا كان (١، ب) = ١ و (١، جـ) = ١، فإن (١، ب جـ) = ١

إذا كان م عدد صحيح أكبر من العدد ١، فإن م عدد أولي إذا كان لأي  
عدد صحيح ١ | أما م | ١ أو (م، ١) = ١، وهذا يعني أنه إذا كان م عدد أولي لا  
يمكن تحليله إلى عوامل تختلف عن ١ النتيجة التالية توضح أنه إذا كان العدد أولي  
م قاسم لحاصل ضرب أعداد صحيحة فإنه لابد أن يكون قاسما على الأقل  
لأحد هذه الأعداد.

مبرهنة: إذا كان م عدد أولي وم | (١، ٢، ٣، .....، ن) فإن م | أي  
لبعض أي حيث  $١ \leq ي \leq ن$ .

البرهان:

إذا كان م | ١ فإن المطلوب قد حصل

نفرض أن م | ١ وهذا يعني أن (١، م) = ١، ولكن م | ١ (٢،  
٣، .....، ن) وهذا يؤدي إلى أن م | ٢، ٣، .....، ن، ومتابعة نفس النقاش يوصلنا

إلى أن  $m \mid n$  لبعض  $i$  حيث  $1 \leq i \leq n$ .

النظرية التالية توضح أن أي عدد صحيح ما هو إلا عدد أولي أو حاصل ضرب أعداد أولية.

مبرهنة: أي عدد صحيح أكبر من الواحد ما هو لا عدد أولي أو حاصل ضرب أعداد أولية

البرهان: لنفرض عدم صحة هذه الفرضية.

هذا يعني وجود عدد صحيح  $n$  أكبر من  $1$  حيث  $n$  لا يكون عدد أولي ولا هو حاصل ضرب أعداد أولية لنفرض أن المجموعة  $A$  تتكون مثل هذه الأعداد، من الواضح أن  $1 \notin A$ ، ومن مبدأ الترتيب الجيد يكون للمجموعة  $A$  عنصر أصغري  $m$  في  $A$ ، وهذا يعني أن  $m = b$  حيث  $1 < m$  و  $1 < b$   $m > 1$  لاحظ أن  $1 < m$  و  $b > m$  والعنصر  $m$  عنصر أصغري، وهذا يعني أن  $1 \in A$  و  $b \in A$ .

من تعريف المجموعة  $A$  نجد أن  $1, b$  عدداً أوليان أو أنهما حاصل ضرب أعداد أولية، وحيث أن  $m = b$  فإن ذلك يؤدي إلى أن  $m$  حاصل ضرب أعداد أولية وهذا يناقض كون  $m$  عنصري في  $A$ ، والتناقض هذا يوضح صحة المبرهنة.

لقد تم توضيح وجود ووحدانية القاسم المشترك الأعظم للعديدين الصحيحين  $1, b$  ولكن لم تعطى طريقة توضيح إيجاد  $(1, b)$ .

## إيجاد القاسم المشترك الأعظم

إذا كان  $m$ ،  $b$  عددان صحيحان موجبان حيث  $m \leq b$ ، فإنه من خوارزمية القسمة هناك عددان صحيحان  $r$ ،  $y$  حيث  $0 \leq r < b$  و  $m = by + r$

إذا كان  $r = 0$ ، فإن  $(a, b)$ ، وإذا كان  $r \neq 0$  فإن هناك عددان صحيحان  $r_1$ ،  $y_1$  حيث  $0 \leq r_1 < r$  و  $b = yr_1 + r_1$

إذا كان  $r_1 = 0$ ، فإن  $(a, b) = r$ ، وإذا كان  $r_1 \neq 0$ ، فإن هناك عددان صحيحان  $r_2$ ،  $y_2$  حيث  $0 \leq r_2 < r_1$  و  $r = r_2 y_2 + r_2$

ونستمر بنفس الكيفية حتى نحصل على

$$a = lb + r \geq 0, \quad b = l_1 r + r_1 \geq 0$$

$$b = l_1 r + r_1 \geq 0, \quad r = l_2 r_1 + r_2 \geq 0$$

$$r = l_2 r_1 + r_2 \geq 0, \quad r_1 = l_3 r_2 + r_3 \geq 0$$

$$r_1 = l_3 r_2 + r_3 \geq 0, \quad r_2 = l_4 r_3 + r_4 \geq 0$$

$$r_2 = l_4 r_3 + r_4 \geq 0, \quad r_3 = l_5 r_4 + r_5 \geq 0$$

ويكون القاسم المشترك الأعظم للعددين  $m$ ،  $b$  هو  $r_5$

نلاحظ في هذا الأسلوب أن آخر باقي غير صفري هو القاسم المشترك

الأعظم للعددين الصحيحين:

مثال:

أوجد  $(565, 306)$

$$\text{الحل : } ٦٥٧ = ٢ (٣٠٦) + ٤٥$$

$$٣٦ + (٤٥) ٦ = ٣٠٦$$

$$٩ + (٣٦) ١ = ٤٥$$

$$(٩) ٤ = ٣٦$$

$$٩ = (٦٥٧, ٣٠٦) \text{ أن } ٩ =$$

النظرية التالية توضح أن أي عدد صحيح  $\neq ١$  هو حاصل ضرب أعداد أولية بطريقة وحيدة بعيداً عن الترتيب.

مبرهنة (النظرية الأساسية للحساب)

مبرهنة: كل عدد صحيح أكبر من واحد يمكن التعبير عنه بطريقة وحيدة (إلا من حيث الترتيب) كمحاصل ضرب أعداد أولية.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين الصحيحين غير الصفريين  $a, b$  هو العدد الصحيح الموجب  $ج$  حيث:

$$a \mid ج, b \mid ج$$

$$b \mid ج, a \mid ج, \text{ فإن } ج \mid ج *$$

يرمز للمضاعف المشترك الأصغر للعددين الصحيحين  $a, b$  بالرمز  $[a, b]$

النتيجة التالية توضح العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأعظم.

مبرهنة: إذا كان  $۱$ ،  $۲$  ب عددين صحيحين غير صفريين، فإن  $(۲، ب)$   $[۲، ب]$   
 $۲ = ب$

النتيجة التالية توضح أنه إذا كان  $(۲، ب) = ۱$ ، فإن  $[۲، ب] = ۲$  ب  
 والعكس صحيح.

مبرهنة: إذا كان  $۲$ ،  $۳$  ب عددين صحيحين غير صفريين، فإن  $[۲، ۳] = ۲$   
 ب إذا وإذا كان فقط  $(۲، ۳) = ۱$

تعاريف:

- (۱) إذا كان  $۲$  |  $۳$ ،  $۲$  |  $۳$  فبرهن أن  $۲ = ۳$
- (۲) إذا كان  $۲$  |  $۳$ ،  $۲$  |  $۴$  فبرهن أن  $۲$  |  $۴$
- (۳) إذا كان  $۲$ ،  $۳$ ،  $۴$  أعداد صحيحة وكان  $۲$  |  $۳$  فبرهن أن  $۲$  |  $۴$
- (۴) أوجد كل الحلول الصحيحة من  $۲$  للمعادلة  
 $۲۹ = ۵س - ۸ي$
- (۵) إذا كان  $۲$ ،  $۳$  ب  $۳$  ص وإذا كان  $۲$  |  $۳$  ب  $۳$  ص  $۱ = ۲$  فبرهن أن  $(۲، ۳) = ۱$
- (۶) إذا كان  $۲$ ،  $۳$ ،  $۴$ ،  $۵$  أعداد صحيحة غير صفرية و  $۲ = ۳ = ۴ = ۵$  ب  $۲ = ۳$  فبرهن أن  $۲$ ،  $۳$ ،  $۴$ ،  $۵$  ب  $۲ = ۳ = ۴ = ۵$
- (۷) برهن أن  $(ن + ۱) = ۱$  لكل عدد صحيح  $ن$ .
- (۸) وضح أن  $(ن - ۱، ن - ۲)$  يساوي  $۱$  لكل  $ن$   $۳$  ص
- (۹) أوجد الأعداد الصحيحة من  $۲$ ،  $۳$  حيث أن  $۸۰۳س - ۱۵۴ي = ۳۳$

(١٠) معاملات ذات الحدين في التعبير

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\text{حيث المعامل} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

برهن أن

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(١١) إذا كان  $(a, b) = 1$ ، فابراز أن

$$(a, b) = 1 \implies (a^2, b^2) = 1$$

(١٢) إذا كان  $n$  عددا صحيحا موجبا، فوضح أن

$$2 \mid (n-1) \text{ أو } 2 \mid n$$

(١٣) برهن أن حاصل ضرب ثلاث أعداد صحيحة متتالية يقبل القسمة على ٦.

(١٤) برهن أن  $(a, b) = 1 \implies (a^2, b^2) = 1$  لكل  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

(١٥) إذا كان  $(a, b) = 1$ ، فبرهن أن  $(a^2, b^2) = 1$ .

## التطابق (Congruence)

تعريف: إذا كان  $m$  عددا صحيحا موجبا، فإن العدد الصحيح  $a$  يطابق العدد الصحيح  $b$  مقياس  $m$  إذا كان  $a \equiv b \pmod{m}$ ، ويكتب  $a \equiv b \pmod{m}$ .

هناك خواص لعلاقة التطابق توضح أن التطابق علاقة متكافئة، وهي:



(١)  $a \equiv b \pmod{m}$  (خاصية التماثل)

(٢) إذا كان  $a \equiv b \pmod{m}$ ، فإن  $b \equiv a \pmod{m}$  (خاصية التماثل)

(٣) إذا كان  $a \equiv b \pmod{m}$ ، و  $b \equiv c \pmod{m}$ ، فإن  $a \equiv c \pmod{m}$  (خاصية الانتقال)

(٤) إذا كان  $a \equiv b \pmod{m}$ ، فإن  $a - b \equiv 0 \pmod{m}$  لأي عدد صحيح جـ.

برهان هذه الخواص هو تطبيق مباشر لتعريف التطابق واستخدام خواص القسمة.

النظرية التالية توضح أن العددين الصحيحين المتطابقين بمقياس م يكون لهما نفس الباقي عند القسمة على م والعكس أيضاً صحيح.

مبرهنة: إذا كان  $a \equiv b \pmod{m}$ ، فإن  $a = b + km$ ، وإذا كان فقط للعددين  $a, b$  نفس الباقي عند القسمة على م.

البرهان:

من خوارزمية القسمة نجد أن هناك عددين صحيحين  $q, r$ ،  $0 \leq r < m$  و

$$a = q_1 m + r_1$$

كذلك هناك عددين صحيحين  $q_2, r_2$ ،  $0 \leq r_2 < m$  و

$$b = q_2 m + r_2$$



يطرح (٢) من (١) نجد أن

$$(٣) \quad ١ - ب = (١ - ١ ل + ٢ م) + (٢ ر - ١ ر)$$

إذا كان  $١ = ب \pmod{م}$ ، فإن  $١ - ب \mid م$  وهذا يعني أن  $١ - ١ ر = ٢ ر = ٠$  في (٣)

ومن ذلك  $١ ر - ٢ ر$

إذا كان  $١ ر = ٢ ر$ ، فإن  $١ ر - ٢ ر = ٠$  وتعويض ذلك في (٣) يتج  $١ - ب =$

$$(١ ل - ٢ ل) م$$

وهذا يعني أن

$$١ - ب \mid م \text{ ومنه نصل إلى أن } ١ = ب \pmod{م}$$

النتيجة التالية توضح أن عملية الجمع وعملية الضرب تحافظان على

عملية التطابق

مبرهنة: إذا كان  $١ = ب \pmod{م}$  و  $ج = د \pmod{م}$ ، فإن:

$$(١) \quad ١ + ج = ب + د \pmod{م}$$

$$(٢) \quad ١ ج = ب د \pmod{م}$$

البرهان:

(١) إذا كان  $١ = ب \pmod{م}$  و  $ج = د \pmod{م}$ ، فإن  $١ - ب \mid م$  و  $(١ - ب) \mid م$

$(ج - د)$ ، ومن خواص القسمة نجد أن  $١ - ب \mid م$  و  $(ج - د) \mid م$

$$(١ + ج) - (١ + د) = (ج - د)$$

$$(٢) \quad \text{الآن } ١ ج - ب د = (١ - ب) د + ب ج - ب د$$



(٢ - ب) ج + ب (ج - د)

وحيث  $١ \mid (٢ - ب)$  و  $١ \mid (ج - د)$  فإن  $١ \mid (ج - ب)$  وهذا يعني  
أن  $١ \mid ج - ب \equiv د \pmod{م}$  يمكن تعميم هذه النظرية كما يلي:  
إذا كان  $١ \mid بي \equiv بي \pmod{م}$  حيث  $١, ٢, ٣, \dots, ن$  فإن:

$$(١) \sum_{ي=١}^ن ١ \equiv \sum_{ي=١}^ن بي \pmod{م}$$

$$(٢) \prod_{ي=١}^ن ١ \equiv \prod_{ي=١}^ن بي \pmod{م}$$

بصفة خاصة إذا كان  $١ \mid أ$  لكل  $ي$  و  $بي \mid ب$  لكل  $١ \leq ي \leq ن$

فإنه إذا كان  $١ \mid ب \equiv ب \pmod{م}$  نحصل على

$$(١) ن \equiv ١ \pmod{م}$$

$$(٢) ١ \equiv بي \pmod{م}$$

من خواص التطابق انه إذا كان  $١ \mid ب \equiv ب \pmod{م}$ ، فإن  $١ \mid ج - ب \equiv ج - ب \pmod{م}$   
لأي عدد صحيح ج لكن عكس هذه الحقيقة غير صحيح بدون  
وضع شروط معينة على العدد الصحيح ج.  
النتيجة التالية توضح هذا الشرط.

مبرهنة: إذا كان  $١ \mid ج - ب \equiv ج - ب \pmod{م}$  (ج، م) = ١، فإن  $١ \mid ب \equiv ب \pmod{م}$

البرهان:

من المفروض نجد أن  $١ \mid (٢ - ب) \mid ج - ب$  وهذا يعني أن هناك عدد صحيح ك  
حيث أن  $(٢ - ب) \mid ج - ب = ك$  وحيث إن  $(ج، م) = ١$  فإن  $١ \mid (٢ - ب)$



وبالتالي يكون  $\equiv \pmod{m}$

التعريف التالي يوضح أن علاقة التطابق تكون فصول متطابقة

تعريف: لنفرض أن  $a$  عدد صحيح .

$$\{ m \mid m \equiv a \pmod{m} \}$$

تسمى فصل التطابق المحدد بالعنصر  $a$  تحت المقياس  $m$

إذا كان  $a \equiv b \pmod{m}$  فإن  $a \equiv b \pmod{m}$  يعني أن  $a \equiv b \pmod{m}$ ، وهذا يعني أن  $a \equiv b \pmod{m}$  ومنه نصل إلى أن هناك عدد صحيح  $k$  بحيث أن  $a - b = km$ ، وهذا يعطينا نتيجة مؤداها أن  $a \equiv b \pmod{m}$  حيث  $k \equiv 0 \pmod{m}$ . فصول التطابق تحققه الخواص التالية:

مبرهنة: إذا كان  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $c \equiv d \pmod{m}$  عدد صحيح موجب، فإن

$$(1) \quad a \equiv b \pmod{m}$$

$$(2) \quad a \equiv b \pmod{m} \text{ إذا وإذا كان فقط } a \equiv b \pmod{m}$$

$$(3) \quad a \equiv b \pmod{m} \text{ يؤدي إلى أن } a \equiv b \pmod{m}$$

$$(4) \quad a \equiv b \pmod{m} \cap c \equiv d \pmod{m} \text{ يؤدي إلى أن } a \equiv b \pmod{m} = c \equiv d \pmod{m}$$

البرهان:

$$(1) \quad \text{حيث أن } a \equiv b \pmod{m}, \text{ فإن } a \equiv b \pmod{m}$$

(٢) إذا كان  $b \in [a]$ ، فإن  $a \equiv b \pmod{m}$  وهذا يعني أن  $m \mid (b-a)$  ومن خواص القاسم نجد أن  $m \mid (b-a)$  وهذا يعني أن  $m \mid (b-a)$  والذي يعني أن  $a \equiv b \pmod{m}$  وهذا بدوره يؤدي إلى أن  $a \equiv b \pmod{m}$ .

(٣) لنفرض أن  $a \equiv b \pmod{m}$ .

معلوم أن  $a \equiv b \pmod{m}$ ، وهذا يعني أن  $a \equiv b \pmod{m}$  ومن (٢) نعلم أنه إذا كان  $a \equiv b \pmod{m}$ ، فإن  $a \equiv b \pmod{m}$  ومن المفروض يكون  $a \equiv b \pmod{m}$  وهذا يؤدي إلى أن  $a \equiv b \pmod{m}$ .

(٤) إذا كان  $a \equiv b \pmod{m}$ ، فإن هناك  $s$   $a \equiv b \pmod{m}$ ،  $s \equiv b \pmod{m}$  وهذا يؤدي إلى أن  $a \equiv b \pmod{m}$  وكذلك  $a \equiv b \pmod{m}$  والذي بدوره يؤدي إلى أن  $a \equiv b \pmod{m}$ .  
الخاصية الأخيرة في النظرية السابقة توضح أن أي فصلين متطابقين إما أن يكونا متساويين أو منفصلين.

### تمارين:

(١) إذا كان  $n \mid m$  حيث  $n > 0$  و  $a \equiv b \pmod{m}$ ، فبرهن أن  $a \equiv b \pmod{n}$ .

(٢) أوجد الباقي عند تقسيم

$2^7$  على  $7$  لكل  $7 \geq 0$  حيث  $7 > 0$

(٣) وضح أنه إذا كان  $b \equiv a \pmod{m}$ ، فإن  $(a, b) = (a, m)$

(٤) حل التطبيقات التالية:

$$(1) \quad 4 \text{ م } 2 \equiv 2 \pmod{6} \quad 2 \text{ م } 2 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$(2) \quad 3 \text{ م } 3 \equiv 3 \pmod{11} \quad 4 \text{ م } 4 \equiv 4 \pmod{6}$$

(٥) إذا كان  $m$  عدد صحيح، فبرهن أن  $0 \equiv a \pmod{m}$  أو  $a \equiv 1 \pmod{m}$

(٦) أوجد أصغر عدد موجب صحيح  $n$  حيث  $3^2 \equiv n \pmod{11}$

(٧) أوجد أصغر عدد صحيح موجب  $n$  حيث  $12^3 \equiv n \pmod{7}$

(٨) إذا كان  $m$  عدد أولي و  $(a, m) = 1$ ، فبرهن أن  $a^{-1} \pmod{m}$  يؤدي إلى

$$a^{-1} \pmod{m} \equiv \pm 1 \pmod{m}$$

(٩) ما هو الباقي عند قسمة  $2^{100} - 1$  على  $2^5 - 1 = 31$

(١٠) وضح أن  $14 \mid (3^{100} + 5^{100} + 1)$

### الأعداد المركبة (Complex Numbers)

على الرغم من أن نظام الأعداد الحقيقية مناسب لحل الكثير من المسائل الفيزيائية والعلمية المختلفة، إلا أن هناك بعض العيوب وخصوصاً عندما يتعلق الأمر بحل بعض المعادلات مثل  $x^2 + 1 = 0$  لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب، لذلك تحتاج إلى نظام يحتوي على نظام الأعداد الحقيقية وله خاصية تلافي بعض العيوب مثل التي ذكرت سابقاً.

هذا النظام هو نظام الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  الذي يتكون من الأزواج المرتبة  $(a, b)$ ، فإذا اعتبرنا  $1 = (1, 0)$ ، فإن الزوج المرتب



(س، ص) يمكن التعبير عنه على الشكل  $س + أ$ ، ولذلك  $ج = \{س + أ$   
 $ص : س، ص \supset ح \}$

لاحظ أن كل عدد حقيقي س هو العدد المركب  $س + أ (٠)$  أو النقطة (س، ٠) على المحور السيني س والذي يسمى المحور الحقيقي، وكل نقطة على محور الصادات الذي يسمى المحور التخيلي هو على الشكل (٠، ص) أو  $٠ + أ$  ص.

يعبر عادة عن العدد المركب  $س + أ$  ص بحرف واحد مثل  
 $ع = س + ص$

هناك بعض العمليات الجبري على الأعداد المركبة نذكر منها:

إذا كان  $ع = ١ + أ$  ص،  $١ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  
 أعداد مركبة، فإن

(١)  $ع = ١ + أ$  ص،  $١ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  
 $و ص = ١ + أ$  ص.

(٢)  $ع = ١ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،

(٣)  $ع = ١ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،  $٢ = ٢ + أ$  ص،

(٤) العدد المركب  $٠ = ٠ + أ$  ص هو المحايد الجمعي، أي أن  $ع + ٠ = ٠ + ع = ع$   
 $ع = ع$  لأي عدد مركب ع.

(٥) لكل عدد مركب  $ع = س + أ$  ص هناك عدد مركب  $-ع = -س - أ$  ص يسمى المعكوس الجمع للعدد المركب ع حيث  $ع + (-ع) = ٠$





(٦) إذا كان  $l \in \mathbb{C}$ ، فإن  $l = s + 1$  ص

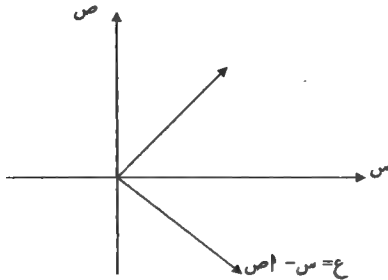
(٧) عملية الجمع عملية تنسيقية، أي أن  $(e+1)e = e + (e+1)e$  ص

وكذلك عملية لضرب عملية تنسيقية أي أن  $(e+1)e = e - 3 = (e+1)e$  ص

مرافق العدد المركب:

إذا كان  $e = s + 1$  ص عدد مركب، فإن مرافق العدد المركب  $e$  هو العدد المركب

$\overline{e} = s - 1$  ص، أي أن مرافق العدد المركب هو صورته في المرآة وهي محور السينات في هذه الحالة



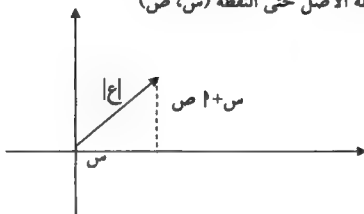


يمكن توضيح المعكوس الضربي للعدد المركب غير الصفري  $z$  وهو

$z^{-1} = \frac{1}{z}$  بعد تعريف مرافق العدد المركب كما يلي:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{s + j\omega} = \frac{s - j\omega}{s + j\omega} = \frac{s - j\omega}{s^2 + \omega^2}$$

إذا كان  $z = s + j\omega$ ، فإن القيمة المطلقة للعدد المركب  $z$  وتكتب  $|z|$  هي المسافة من نقطة الأصل حتى النقطة  $(s, \omega)$



$$|z| = \sqrt{s^2 + \omega^2}$$

لاحظ أن  $z^{-1} = \frac{s - j\omega}{s^2 + \omega^2}$

ولهذا يمكن وضع صيغة أخرى لمعكوس العدد المركب غير الصفري  $z$  كما

يلي

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

النظرية التالية توضح أهم خواص مرافق العدد المركب وعلاقة ذلك بالقيمة المطلقة للعدد المركب.



مبرهنة:

إذا كان  $\varepsilon = s + 1 + h$ ، و  $s = 2 + 1 + \dots + 1$  عدنان مركبان، فإن:

$$(1) \quad \overline{\varepsilon} = \varepsilon$$

$$(2) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon + \varepsilon, \varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon$$

$$(3) \quad \overline{\varepsilon + \varepsilon} = \overline{\varepsilon} + \overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon - \varepsilon} = \overline{\varepsilon} - \overline{\varepsilon}$$

$$(4) \quad \overline{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right)} = \frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{\varepsilon}} \text{ بشرط أن } \varepsilon \neq 0$$

$$(5) \quad \varepsilon = \overline{\varepsilon} \text{ إذا وإذا كان فقط } \varepsilon \text{ عدد حقيقي}$$

$$(6) \quad |\varepsilon| = |\overline{\varepsilon}|, |\varepsilon - \varepsilon| = |\varepsilon| - |\varepsilon|$$

$$(7) \quad |\varepsilon| = |\overline{\varepsilon}| \text{ و } |\varepsilon| = |\overline{\varepsilon}| \text{ بشرط أن } \varepsilon \neq 0$$

$$(8) \quad |\varepsilon + \varepsilon| \geq |\varepsilon| + |\varepsilon|$$

البرهان:

$$(1) \quad \text{لاحظ أن } \varepsilon = s - 1 + h \text{ ولذلك فإن: } \overline{\varepsilon} = s + 1 + h$$

$$(2) \quad \varepsilon + \varepsilon = (s + 1 + h) + (s + 1 + h) = 2s + 2 + 2h = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon - \varepsilon = (s + 1 + h) - (s + 1 + h) = 0 = \varepsilon_2$$



$$(٣) \quad ع + و = (ص_١ + ص_٢) + (ص_١ + ص_٢) + (ص_١ + ص_٢) = (ص_١ + ص_٢) + (ص_١ + ص_٢) + (ص_١ + ص_٢)$$

وكذلك فإن:

$$\overline{ع + و} = \overline{(ص_١ + ص_٢) - (ص_١ + ص_٢) - (ص_١ + ص_٢)} = \overline{ص_١ - ص_٢ - ص_٢ + ص_١ - ص_٢ + ص_١} = \overline{ص_١ - ص_٢ - ص_٢ + ص_١ - ص_٢ + ص_١}$$

$$\text{الآن } ع + و = (ص_١ + ص_٢) + (ص_١ + ص_٢) + (ص_١ + ص_٢) = (ص_١ + ص_٢) + (ص_١ + ص_٢) + (ص_١ + ص_٢) +$$

$$\overline{ع + و} = \overline{ص_١ - ص_٢ - ص_٢ + ص_١ - ص_٢ + ص_١} = \overline{(ص_١ - ص_٢) + (ص_١ - ص_٢) + (ص_١ - ص_٢)} = \overline{ع - و}$$

$$(٤) \quad \frac{ع}{و} = \frac{ص_١ + ص_٢}{ص_١ - ص_٢} = \frac{ص_١ + ص_٢}{ص_١ - ص_٢} = \frac{ص_١ + ص_٢}{ص_١ - ص_٢}$$

ومن ذلك نجد أن

$$\left( \frac{ع}{و} \right) = \frac{ص_١ + ص_٢}{ص_١ - ص_٢} = \frac{ص_١ + ص_٢}{ص_١ - ص_٢} = \frac{ص_١ + ص_٢}{ص_١ - ص_٢}$$

٥) إذا كان  $ع = \overline{ع}$ ، فإن  $ص_١ + ص_٢ = ص_١ - ص_٢$  وهذا لا يحصل إلا إذا كان  $ص = ٠$ ، أي أن  $ع = ص_١ + ص_٢ = (٠) + ص_١$  وهذا يعني أن  $ع$  عدد حقيقي.

أما الاتجاه الآخر، فإنه إذا كان  $ع$  عدد حقيقي فإن ذلك يعني أن  $ع = ص_١ + ص_٢ = (٠) + ص_٢$  وهذا يعني أن  $ع = \overline{ع}$  وبذلك فإن  $ع = ع$

٦) يترك للقارئ ٧) يترك للقارئ ٨) يترك للقارئ

التحليل القطبي للعدد المركب

$$\text{إذا كان } ع = ص_١ + ص_٢ \text{ عدد مركب، فإنه إذا كان } ر = |ع| = \sqrt{ص_١^٢ + ص_٢^٢}$$

وكانت  $\theta$  هي الزاوية التي يصنعها المتجه  $c$  مع محور السينات أو يوازيه، فإن

$$s = r \cos \theta$$

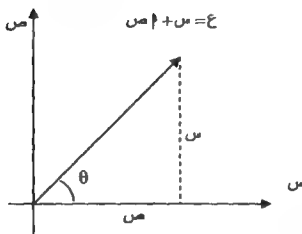
$$v = r \sin \theta$$

لذلك فإن  $c = s + av = r \cos \theta + ar \sin \theta$  (جنا  $\theta$  +

جا  $\theta$ )

وهذا ما يسمى بالتمثيل القطبي للعدد المركب  $c$ ، أي أن:

$$c = r (\cos \theta + j \sin \theta)$$



$$\frac{v}{s} = \tan \theta$$

والزاوية  $\theta$  لها قيم عديدة، وجدنا قيمة للزاوية  $\theta$  وأضفنا إليها أي

مضاعف صحيح للزاوية  $2\pi$

نصل إلى قيمة أخرى للزاوية  $\theta$ ، فإذا كانت  $\theta$  قيمة للزاوية  $\theta$ ، فإن القيمة

العامة للزاوية  $\theta$  هي  $\theta = \theta + 2\pi n$



حيث  $n = 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \dots$

القيمة الرئيسية للزاوية  $\theta$  هي القيمة التي تقع بين  $-\pi, \pi$

يمكن القيام بالعمليات الجبرية على الأعداد المركبة في شكلها القطبي، فإن

كان:

$$r_1 = r_2 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) \text{ و } r_2 = r_3 (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$$

فإن

$$r_1 r_2 = r_3 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

و

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{r_3} [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ولهذا فإن:

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{r_3} [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ومن القوانين السابقة يمكن استنتاج أنه إذا كان  $r = r_1 r_2 (\cos \theta + j \sin \theta)$

فإن

$$r^n = r^n (\cos n\theta + j \sin n\theta)$$

حيث  $n$  عدد صحيح موجب. كذلك

$$r^{-n} = r^{-n} (\cos n\theta - j \sin n\theta)$$

هذه القوانين تستخدم لحل الكثير من المعادلات التي تحتوي على أعداد

مركبة



مثال (١) : أوجد  $(1 + i)^{10}$

الحل :  $\frac{\pi}{4} = \theta, r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

إذن  $e^{i\theta} = [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$

$$\left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]^{10} (\sqrt{2})^{10} = (1 + i)^{10}$$

$$= (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^{10} \cdot 2^5$$

$$= 2^5 \cdot (\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4})$$

تعاريف:

س١) أنجز العملية المعطاه في كل حالة

(أ)  $(1 + 3i)(1 + 2i)$

(ب)  $(1 + 3i)(1 - 2i)$

(ج)  $(1 + 3i)^2 (1 - 3i)^2$

س٢) حل المعادلة  $z^2 - 2z + 1 = 0$  مع  $z$

س٣) أوجد  $\left[ \frac{1}{1+i} + (1+i) \right]^2$

س٤) أوجد  $\left| \frac{(1+i)(1+3i)+1}{1-3i} \right|$

س٥) حول العدد المركب إلى الشكل القطبي في كل حالة



$$\sqrt[3]{p+3\sqrt{p}}$$
 (1)

$$\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2 + p^2$$
 (ب)

س٦) أوجد

$$\sqrt[3]{p+3\sqrt{p}-1}$$
 (ب) (1)  $(12 + 1)^{12}$

$$(12 + 1)^{12} - (1 + 1)^{12}$$
 (ج)  $(12 + 1)^{12} - (1 + 1)^{12}$  (د)  $(12 + 1)^{12}$

٧) أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها هما  $p-1$ ،  $p$

$$1 - p = p^2$$
 (٨)

$$0 = 8 - p^2$$
 (٩)

$$\left(\frac{\sqrt{p}}{2} + \frac{\sqrt{p}}{2}\right)^2$$
 (١٠)



## تمارين

(١) أوجد (١، ب) وعبر عن ذلك على الشكل ١ من + ب ص في كل حالة

(ب) (٧٢، ٢٦)

(١) (-٤، ١١٦)

(د) (١٠٥٣٠، ٢٥٢٠)

(ج) (٧٢، ٢٥)

(٢) أوجد [١، ب] في كل حالة

(١) [٧٣١، ٩٥٢]

(ب) [١٣٢، ٥٠٤]

(ج) [٢٢٠، ٢٩٢٤]

(٣) إذا كان ١، ب  $\exists$  ص حيث ١ من + ب ص = ١، ١ من ص  $\exists$

فبرهن أن (١، ب) = ١

(٤) برهن أن  $\sqrt[3]{٣٧}$  عدد غير قياسي

(٥) أوجد من، ص حيث أن ٨٠٣ من - ١٥٤ ص = ١

- س٦) برهن أن مجموعة الأعداد الأولية مجموع غير منتهية.  
 س٧) إذا كان  $1 < p$ ، فبرهن مستخدماً الاستقراء الرياضي أن

$$\frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} = 1 + p + p^2 + \dots + p^n$$

- ٨) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن

$$\frac{1}{1+n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

- ٩) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن

$$n^3 - n \text{ يقبل القسمة على } 3$$















# الرياضيات

Bibliotheca Alexandrina



1212894



9 789957 247119

دار صفا للدراسة والتعلم والتشرف والتفوق

الملكة الأميرة الهانمية - عمان - شارع الملك حسين  
مجمع الفحص التجاري - هاتف: +962 6 4611169  
تلماكو، +962 6 4612190 - ص ب 922762 عمان 11192 الأردن  
E-mail: safa@darsafa.net www.darsafa.net

